Solusi Polinomial Romanovski pada Analisis Energi dan Fungsi Gelombang Potensial Non Sentral Rosen Morse Plus Rosen Morse

Cecilia Yanuarief[1]
[1]*Program Studi Fisika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta*
Jl. Marsda Adisutjipto No. 1, Yogyakarta 55281
Telp : 274-512474, 274-589621 Fax. 274-586117
E-mail : cecilia.yanuarief@uin-suka.ac.id

Abstrak – Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai energi dan fungsi gelombang persamaan Schrödinger potensial non sentral Rosen Morse plus Rosen Morse. Persamaan Schrödinger diselesaikan menggunakan metode polinomial Romanovski. Tingkat energi yang diperoleh merupakan fungsi tertutup sedangkan fungsi gelombang baik polar maupun radial dinyatakan dalam bentuk persamaan polinomial Romanovski. Untuk menunjukan akurasi hasil penelitian ini, spektrum energi dan fungsi gelombang bagian polar maupun radial serta grafik rapat probabilitas divisualisasikan dengan pemrograman komputer. Visualisasi fungsi gelombang radial yang terbentuk mendeskripsikan nilai probabilitas ditemukannya partikel, sedangkan visualisasi fungsi gelombang polar yang terbentuk mendeskripsikan arah momentum sudut orbital dari sebuah partikel yang berada dalam pengaruh potensial sistem.

Kata kunci: non sentral Rosen Morse, polinomial Romanovski.

PENDAHULUAN

Mekanika kuantum sudah lama dikenal sebagai ilmu dasar bagi pengkajian gejala dan sifat berbagai sistem mikroskopik. Pemanfaatannya tidak hanya berhasil memperluas dan memperdalam pemahaman peristiwa alami di dalam laboratorium, tetapi juga menghasilkan kemajuan teknologi secara luas, dan mempengaruhi kualitas serta corak hidup manusia secara tidak langsung. Perkembangan mekanika kuantum berakar dari konsep dasar teori kuantum yang meliputi dugaan-dugaan baik secara diskrit maupun ketidakteraturan. Teori kuantum terbukti mampu menjelaskan fenomena kuantum dari sistem makroskopik seperti superkonduktivitas dan superfluiditas yang memiliki potensi aplikasi penting. Proses pembelajaran mekanika kuantum selalu melibatkan persamaan-persamaan yang rumit dan penyelesaiannya membutuhkan analisa dan pemikiran yang tinggi. Contoh masalah yang cukup rumit adalah penyelesaian nilai energi dan fungsi gelombang persamaan Schrödinger [5]. Penelitian tentang penyelesaian nilai energi dan fungsi gelombang persamaan Schrödinger merupakan penelitian yang sangat penting dalam ilmu fisika modern. Berbagai metode penyelesaian persamaan Schrödinger untuk gerak partikel pada potensial-potensial sentral dan non sentral dengan suatu potensial vektor atau suatu potensial skalar terpisahkan telah dikembangkan. Berbagai metode yang telah dikembangkan tersebut diantaranya adalah metode Super Symmetry [3], metode Nikiforov-Uvarov [6], dan metode polinomial Romanovski [1]. Berdasarkan fakta tersebut, maka dilakukanlah penelitian yang bertujuan untuk memecahkan kerumitan dalam menyelesaikan nilai energi dan fungsi gelombang persamaan Schrödinger tersebut dengan cara menggunakan metode polinomial Romanovski. Sebagai pembeda yang menjadi ciri khas penelitian ini adalah potensial persamaan Schrödinger yang digunakan merupakan kombinasi antara dua potensial non sentral yaitu kombinasi antara potensial non sentral Rosen Morse [4] sebagai potensial sistem dan potensial non sentral Rosen Morse sebagai potensial pengganggu, dimana potensial ini merupakan kandidat utama sebagai potensial efektif dalam Quantum Chromodynamic (QCD) [2], sehingga penelitian tentang bagaimana Solusi Polinomial Romanovski pada Analisis Energi dan Fungsi Gelombang Potensial Non Sentral Rosen Morse Plus Rosen Morse menjadi penting untuk dilakukan.

LANDASAN TEORI

Teori Dasar Polinomial Romanovski

Persamaan umum hypergeometry orde dua dinyatakan sebagai berikut,

$$\sigma(x)\frac{d^2y_n(x)}{dx^2}+\tau(x)\frac{dy_n(x)}{dx}+\lambda_n y_n(x)=0, \quad (1)$$

$$\sigma(x)=ax^2+bx+c; \quad \tau=dx+e, \quad (2a)$$

dengan parameter Romanovski,

$a=1,\ b=0,\ c=1,\ d=2(1-p)$, dan

$$e=q,\ p>0,\ y_n(x)=D_n^{(p,q)}(x), p>n, \quad (2b)$$

Sehingga, persamaan hypergeometry orde dua yang dipenuhi oleh polinomial Romanovski, yaitu,

$$(1+x^2)\frac{d^2D_n^{(p,q)}(x)}{dx^2}+(2x(1-p)+q)\frac{dD_n^{(p,q)}(x)}{dx}-\{n(n-1)+2n(1-p)\}D_n^{(p,q)}(x)=0. \quad (3)$$

Persamaan Schrödinger dapat direduksi menjadi persamaan differensial orde dua yang dinyatakan dalam bentuk persamaan (3) dengan melakukan substritusi variabel yang sesuai. Cara yang digunakan adalah dengan mensubstitusi fungsi gelombang persamaan Schrödinger dengan permisalan fungsi gelombang Romanovki, yaitu,

$$g(x)=(1+x^2)^{\frac{\beta}{2}}e^{\frac{-\alpha}{2}tan^{-1}x}D_n^{(p,q)}(x), \quad (4)$$

dengan,

$$D_n^{(p,q)}(x)=\frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}((1+x^2)^n w(x)). \quad (5)$$

Persamaan (5) merupakan polynomial Romanovski, dengan $w(x)$ merupakan faktor bobot yang dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan differensial Pearson, yaitu,

$$\frac{d}{dx}\big(\sigma(x)w(x)\big)=\tau(x)w(x). \quad (6)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (2a) dan (2b) ke persamaan (6), maka diperoleh,

$$w(x)=\exp\left(\int\frac{(d-2a)x+(e-b)}{ax^2+bx+c}dx\right),$$

$$w(x)=\exp\left(\int\frac{-2px+q}{1+x^2}dx\right),$$

$$w(x)=exp[-p\,ln(1+x^2)+q\,tan^{-1}x],$$

$$w(x)=(1+x^2)^{-p}e^{q\,tan^{-1}(x)}. \quad (7)$$

Menentukan tingkat energi dan fungsi gelombang dengan polinomial Romanovski

Potensial yang merupakan kombinasi dari potensial non sentral Rosen Morse dengan potensial non sentral Rosen Morse adalah;

$$V(r,\theta)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{V_0}{2}\left(\coth\left(\frac{r}{2a}\right)-1\right)\right]+\frac{\hbar^2}{2mr^2}\left[\frac{\nu(\nu+1)}{\sin^2\theta}-2\mu\cot\theta\right], \quad (8)$$

dengan $V_0>0$.

Persamaan Schrödinger untuk persamaan (8) adalah,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\psi(r,\theta,\varphi)+\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{V_0}{2}\left(\coth\left(\frac{r}{2a}\right)-1\right)\right]+\frac{\hbar^2}{2mr^2}[\nu(\nu+1)\csc^2\theta-2\mu\cot\theta]\right]\psi(r,\theta,\varphi)=E\psi(r,\theta,\varphi). \quad (9)$$

Dari persamaan (9), diperoleh,

$$-\frac{1}{P(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)P(\theta)-\frac{1}{\phi(\varphi)}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\phi(\varphi)+[\nu(\nu+1)\csc^2\theta-2\mu\cot\theta]=\lambda, \quad (10a)$$

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)R(r)+r^2\left[\frac{V_0}{2}\left(\coth\left(\frac{r}{2a}\right)-1\right)\right]+\frac{2mr^2}{\hbar^2}E=\lambda, \quad (10b)$$

dengan λ adalah konstanta sparasi dengan nilai $\lambda=l(l+1)$ dan l adalah bilangan kuantum orbital, $l=0,1,2,$ ....Penyelesaian persamaan gelombang untuk bagian azimuth pada persamaan (10a), yaitu,

$$\phi=A_m e^{im\varphi}, \quad (10c)$$

dengan A_m adalah konstanta normalisasi dan $m=0,\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ldots$

Penyelesaian Fungsi Gelombang Persamaan Schrödinger Bagian Polar

Dari substitusi persamaan (10c) kepersamaan (10a), diperoleh,

$$\frac{\partial^2 P(\theta)}{\partial\theta^2} + \cos\theta \frac{\partial P(\theta)}{\partial\theta} - \left(\frac{\nu(\nu+1)+m^2}{sin^2\theta} - 2\mu\cos\theta\right)P(\theta) + \lambda P(\theta) = 0. \quad (11)$$

Dengan substitusi variabel $\cot\theta = x$ pada persamaan (11), maka diperoleh,

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 P(\theta)}{\partial x^2} + x\frac{\partial P(\theta)}{\partial x} - \left\{(\nu(\nu+1)+m^2) - \frac{2\mu x}{(1+x^2)} - \frac{\lambda}{(1+x^2)}\right\}P(\theta) = 0. \quad (12)$$

Persamaan (12) diselesaikan dengan mensubstitusi fungsi gelombang $P(\theta)$ dengan permisalan fungsi gelombang Romanovski seperti pada persamaan (4), yaitu, dengan $P(\theta) = g(x)$, sehingga diperoleh

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 D_{n_l}^{(p,q)}(x)}{\partial x^2} + \{(2\beta+1)x - \alpha\}\frac{\partial D_{n_l}^{(p,q)}(x)}{\partial x} - \{\nu(\nu+1)+m^2 - \beta^2 - \beta + \beta\}D_{n_l}^{(p,q)}(x) = 0, \quad (13)$$

$$D_{n_l}^{(p,q)}(x) = \mathcal{R}_{n_l}^{(-\beta,-\alpha)}(x) \quad (14)$$

Dengan membandingkan persamaan (13) dengan persamaan (3), maka diperoleh,

$$\alpha = \frac{2\mu}{\beta - \frac{1}{2}} = -\frac{2\mu}{\sqrt{\nu(\nu+1)+m^2} + n_l + \frac{1}{2}}, \quad (15a)$$

$$\beta = -\sqrt{\nu(\nu+1)+m^2} - n_l, \quad (15b)$$

$$l + \frac{1}{2} = \sqrt{\left(\sqrt{\nu(\nu+1)+m^2} + n_l + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\mu^2}{\left(\sqrt{\nu(\nu+1)+m^2} + n_l + \frac{1}{2}\right)^2}}. \quad (15c)$$

Dari persamaan (15a), (15b) dan (15b), maka fungsi gelombang polar dapat diperoleh melalui persamaan (4), (5), dan (7),yaitu,

$$P_l^m = \sqrt{(1+x^2)^{-\sqrt{\nu(\nu+1)+m^2}-n_l} \cdot e^{\frac{2\mu}{\sqrt{\nu(\nu+1)+m^2}+n_l+\frac{1}{2}}\tan^{-1}(x)}} \cdot \mathcal{R}_{n_l}^{(-\beta,-\alpha)}(x), \quad (16a)$$

dengan,

$$\mathcal{R}_{n_l}^{(-\beta,-\alpha)}(x) = \frac{1}{w^{(-\beta,-\alpha)}}\frac{d^{n_l}}{dx^{n_l}}\left[(1+x^2)^{n_l} \cdot w^{(-\beta,-\alpha)}\right], \quad (16b)$$

$$w^{(-\beta,-\alpha)} = (1+x^2)^{-\sqrt{\nu(\nu+1)+m^2}-n_l} \cdot e^{\frac{2\mu}{\sqrt{\nu(\nu+1)+m^2}+n_l+\frac{1}{2}}\tan^{-1}(x)}. \quad (16c)$$

Penyelesaian Fungsi Gelombang Persamaan Schrödinger Bagian Radial

Dari persamaan (10b), persamaan Schrödinger bagian radial dapat ditulis kembali,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)R(r) + \left[\frac{V_0}{2}\left(\coth\left(\frac{r}{2a}\right) - 1\right) + \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r) = 0, \quad (17)$$

dengan,

$$\frac{2m}{\hbar^2}E = -\epsilon^2, \frac{2me^2}{\hbar^2} = \beta^2, \text{ dan } R(r) = \frac{\mathrm{X}(r)}{r}, \quad (18)$$

maka persamaan (17) menjadi,

$$\frac{\partial^2 \mathrm{X}(r)}{\partial r^2} + \left(\frac{V_0}{2}\coth\left(\frac{r}{2a}\right) - \frac{l(l+1)}{4a^2}\mathrm{csch}^2\left(\frac{r}{2a}\right) - \frac{V_0}{2} - \epsilon^2\right)\mathrm{X}(r) = 0, \quad (19)$$

dengan substitusi variabel $\coth\left(\frac{r}{2a}\right) = ix$ pada persamaan (19), diperoleh,

$$(1+x^2)\frac{d^2\mathrm{X}(x)}{dx^2} + 2x\frac{d\mathrm{X}(x)}{dx} - \left[l(l+1) - \left(\frac{1-ix}{1+x^2}\right)2a^2V_0 + \frac{4a^2\epsilon^2}{1+x^2}\right]\mathrm{X}(x) = 0. \quad (20)$$

Persamaan (12) diselesaikan dengan mensubstitusi fungsi gelombang $\mathrm{X}(x)$ dengan permisalan fungsi gelombang Romanovski seperti pada persamaan (4), yaitu, dengan $\mathrm{X}(x) = g(x)$, sehingga diperoleh,

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 D_{n_r}^{(p,q)}(x)}{\partial x^2} + [2(\beta+1)x - \alpha]\frac{\partial D_{n_r}^{(p,q)}(x)}{\partial x} - \left[l(l+1) - \left[\left(\beta + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]\right]D_{n_r}^{(p,q)}(x) = 0, \quad (21)$$

$$D_{n_r}^{(p,q)}(x) = \mathcal{R}_{n_r}^{(-\beta,-\alpha)}(x). \quad (22)$$

Dengan membandingkan persamaan (22) dengan persamaan (3), maka diperoleh :

$$\alpha = \frac{2ia^2V_0}{(n_r+l+1)}, \quad (23a)$$

$$\beta = -(n_r + l + 1), \quad (23b)$$

serta diperoleh persamaan energi dari persamaan (18) dan (23b), yaitu,

$$E_{n_r;l} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\left[V_0 - \frac{(n_r+l+1)^2}{4a^2} + \frac{a^2{V_0}^2}{4(n_r+l+1)^2}\right], \quad (24)$$

$$n_r + l + 1 = n. \quad (25)$$

Menggunakan persamaan (24) dan (25), maka fungsi gelombang radial dapat diperoleh melalui persamaan (4), (5), dan (7), yaitu,

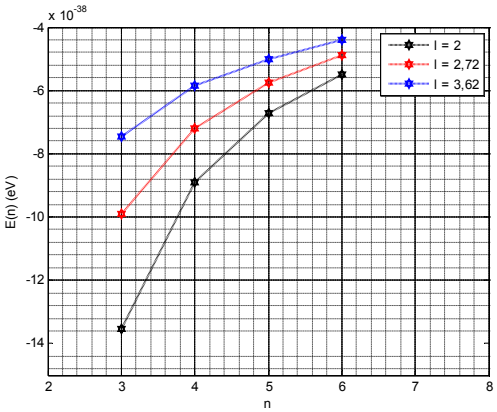
$$X_{n_r;l} = \sqrt{(1+x^2)^{-(n_r+l+1)} \cdot e^{\frac{2ia^2V_0}{(n_r+l+1)}\tan^{-1}(x)}} \cdot \mathcal{R}_{n_r}^{(-\beta,-\alpha)}(x), \quad (26a)$$

dengan,

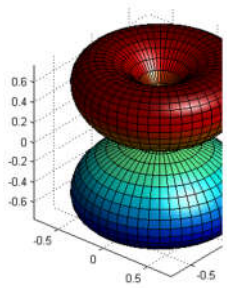
$$\mathcal{R}_{n_l}^{(-\beta,-\alpha)}(x) = \frac{1}{w^{(-\beta,-\alpha)}}\frac{d^{n_l}}{dx^{n_l}}\left[(1+x^2)^{n_l} \cdot w^{(-\beta,-\alpha)}\right], \quad (26b)$$

$$w^{(-\beta,-\alpha)} = (1+x^2)^{-(n_r+l+1)} e^{\frac{2ia^2V_0}{(n_r+l+1)}tan^{-1}(x)}. \quad (26c)$$

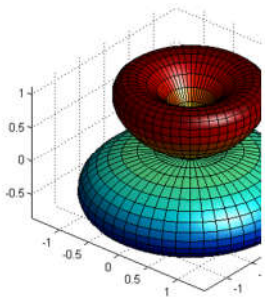
HASIL DAN PEMBAHASAN



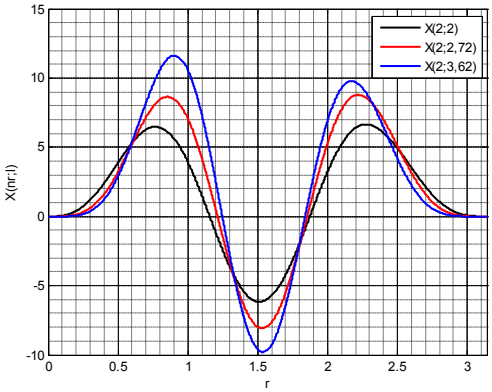
Gambar 1. Grafik Tingkat Energi



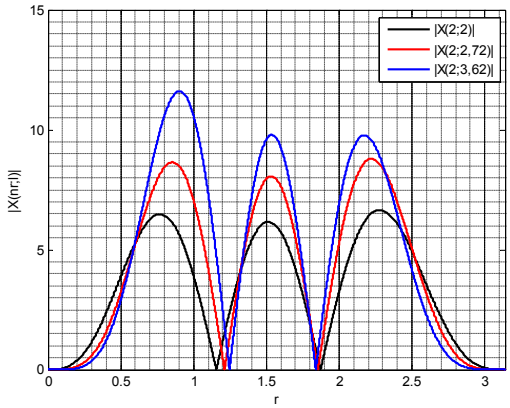
Gambar 2. Fungsi Gelombang Polar Untuk $\boldsymbol{\nu = \mu = 0, n_l = 1, m = 1}$



Gambar 3. Fungsi Gelombang Polar Untuk $\boldsymbol{\nu = \mu = 1, n_l = 1, m = 1}$



Gambar 4. Fungsi Gelombang Radial untuk $\boldsymbol{n_r = 2}$, $\boldsymbol{a = 0,25}$; $\boldsymbol{b = 1}$



Gambar 5. Grafik Rapat Probabilitas untuk $\boldsymbol{n_r = 2}$, $\boldsymbol{a = 0,25}$; $\boldsymbol{b = 1}$

Persamaan Schrödinger potensial non sentral Rosen Morse plus Rosen Morse memiliki penyelesaian fungsi gelombang pada bagian radial dan bagian polar [5]. Untuk analisis energi persamaan Schrödinger, Gambar 1 menunjukan tingkat energi partikel dari persamaan (24). Energi partikel pada keadaan n dipengaruhi oleh nilai bilangan kuantum utama yang terdiri dari bilangan kuantum radial n_r dan bilangan kuantum orbital l. Untuk menentukan nilai l, dipilih dari keadaan dasar persamaan (15c) saat $\upsilon = \mu = 0$ yaitu, $l = m + n_l$. Dengan mempertimbangkan kedaan fisis dimana $l \geq 0$ dan $n_l \geq 0$, maka bilangan kuantum magnetik $m \geq n_l$. Pertimbangan tersebut yang menjadi acuan untuk menentukan fungsi gelombang polar dengan persamaan (16a) dan fungsi gelombang radial dengan persamaan (26a).

Pada penyelesaian fungsi gelombang polar, bilangan kuantum orbital l yang secara fisis

mempengaruhi bentuk orbit partikel dipengaruhi oleh nilai υ dan μ. Jika ditinjau dari persamaan (15a) dan (15b), nilai υ dan μ mempengaruhi nilai α dan β. Kedua nilai tersebut merupakan koefisien dari hamiltonian pengganggu. Saat $\alpha > 0$ dan/atau $\beta > 0$, menggambarkan adanya gangguan pada sistem, dan saat $\alpha = \beta = 0$ menggambarkan bahwa sistem tidak terganggu dengan anggapan perubahan nilai α dan β berubah secara kontinyu, sehingga eigenfungsi dan energi eigen terganggu berubah secara halus kedalam eigenfungsi dan energi eigen tak terganggu.

Jika ditinjau dari persamaan (8) yang merupakan persamaan potensial non sentral Rosen Morse plus Rosen Morse, untuk nilai $\upsilon = \mu = 0$ mengakibatkan potensial Rosen Morse pengganggu bernilai nol, sehingga fungsi gelombang hanya di pengaruhi oleh potensial Rosen Morse sistem. Namun untuk $\upsilon > 0$ dan $\mu > 0$ mengakibatkan fungsi gelombang mendapat gangguan dari potensial Rosen Morse pengganggu dengan bentuk gangguan seperti pada gambar 2 dan 3. Bentuk gangguan nilai υ dan μ dapat dijelaskan dengan persamaan (15c) dimana nilai υ dan μ berpengaruh terhadap nilai bilangan kuantum orbital l yang mempengaruhi bentuk orbit partikel. Semakin besar nilai υ, maka fungsi gelombang polar secara keseluruhan juga membesar, namun jika semakin besar nilai μ, gangguan yang diberikan pada fungsi gelombang polar adalah memperkecil fungsi gelombang positif dan memperbesar fungsi gelombang negatif.

KESIMPULAN

Dari uraian diatas, penyelesaian nilai energi dan fungsi gelombang persamaan Schrödinger potensial non sentral Rosen Morse plus Rosen Morse dapat diselesaiakan dengan menggunakan metode polinomial Romanovski.

PUSTAKA

[1] Alvarenz-Castillo. D.E. 2009. *Exactly Solvable Potentials and Romanovski Polynomials in Quantum Mechanics*. Physics Thesis of Autonomous University of San Luis Potosi, Mexico

[2] Compean. C.B. and Kirchbach. M. 2006. The Trigonometric Rosen-Morse Potential as a Prime Candidate for an Effective QCD Potential. Av. Manuel Nava No. 6, S.L.P. 78290, México (Abstr.)

[3] Compean. C.B. and Kirchbach. 2008. *The Trigonometric Rosen-Morse Potential in the Supersymmetric Quantum Mechanics and its Exact Solutions*. Av. Manuel Nava 6, San Luis Potos´ı, S.L.P. 78290, M´exico : 12

[4] Flugge, S. 1971. *Practical Quantum Mechanics II.* New York: Springer.

[5] Greiner, W and B. Muller. 2004. *Quantum Mechanics: Symmetries*. Berlin-Heidelberg: Springer. 2nd rev. ed.

[6] Ikot *et al*. 2011. *Analytical Solutions of Schrödinger Equation with Two-Dimensional Harmonic Potential in Cartesian and Polar Coordinates Via Nikiforov-UvarovMethod*.JVR. 65-76