SEMI MODUL POLINOMIAL FUZZY ATAS ALJABAR MAX-PLUS FUZZY

Ari Wardayani dan Suroto
Prodi Matematika, Jurusan MIPA, Fakultas Sains dan Teknik
Universitas Jenderal Soedirman
(email : ariwardayani@yahoo.co.id, suroto_80@yahoo.com)

ABSTRAK. Pada makalah ini dibahas mengenai perluasan aljabar max-plus fuzzy pada polinomial dengan koefisien bilangan fuzzy. Selanjutnya, dibuktikan polinomial fuzzy tersebut merupakan semi modul atas aljabar max-plus fuzzy.

Kata kunci : aljabar max-plus fuzzy, polinomial fuzzy, semi modul

ABSTRACT. In this paper, we discuss the extension of fuzzy max-plus algebra on polynomial with coefficient in fuzzy number. We also proof that fuzzy polynomial is semi modul over fuzzy max-plus algebra.

Key word : fuzzy max-plus algebra, fuzzy polynomial, semi modul

PENDAHULUAN

Aljabar max-plus merupakan struktur aljabar $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ yang disertai dengan dua operasi biner yakni maksimum dan penjumlahan. Struktur aljabar $\mathbb{R}_{max}$ yang disertai dengan operasi biner maksimum sebagai operasi $\oplus$ dan operasi penjumlahan sebagai operasi $\otimes$ adalah semi lapangan komutatif idempoten (Bacelli, 2001). Pada dasarnya, himpunan yang dibicarakan dalam pembahasan konsep aljabar max-plus lebih terpusat pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$.

Namun, dalam perkembangan selanjutnya aljabar max-plus dapat diperluas himpunan pembicaraannya menjadi himpunan bilangan fuzzy (Rudhito, 2006). Bilangan fuzzy adalah himpunan fuzzy dalam semesta $\mathbb{R}$ yang memenuhi sifat normal, mempunyai *support* terbatas, setiap α-*cut*nya merupakan selang tertutup, dan konveks. Untuk selanjutnya himpunan bilangan fuzzy dilambangkan dengan $\mathcal{R}$. Operasi maksimum dan penjumlahan pada $\mathcal{R}$ dapat didefinisikan dengan menggunakan prinsip perluasan atau dengan α-*cut* pada himpunan fuzzy (Zimmermann, 1991).

Teorema dekomposisi merupakan landasan kerja pemanfaatan prinsip perluasan dan α-*cut* pada himpunan fuzzy yang dapat digunakan untuk menentukan operasi aritmatika pada bilangan fuzzy (Susilo, 2006). Untuk selanjutnya aljabar max-plus fuzzy dinotasikan dengan $\mathcal{R}_{max}$, dengan $\mathcal{R}$ adalah himpunan bilangan fuzzy. Pada tahun 2007, Rudhito membuktikan semi modul bilangan fuzzy atas aljabar max-plus fuzzy dan perluasannya pada matriks bilangan fuzzy. Pada tulisan ini, akan dibuktikan bahwa himpunan polinomial fuzzy merupakan semi modul atas semi ring aljabar max-plus fuzzy.

SEMI MODUL POLINOMIAL FUZZY

Semi ring $\mathcal{K}$ merupakan suatu himpunan tak kosong yang disertai dengan dua operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ yang memenuhi $(\mathcal{K},\oplus)$ semi grup komutatif dengan elemen nol ε , $(\mathcal{K},\otimes)$ semi grup dengan elemen satuan e, elemen nol ε merupakan elemen penyerap terhadap operasi $\otimes$, dan $\otimes$ distributif terhadap $\oplus$. Suatu semi ring dikatakan idempoten jika operasi $\oplus$ bersifat idempoten dan dikatakan komutatif jika operasi $\otimes$ bersifat komutatif.

Semi modul $\mathcal{M}$ atas semi ring $\mathcal{K}$ adalah himpunan tak kosong yang disertai operasi internal $\oplus$ dengan elemen nol ε, dan operasi eksternal yang didefinisikan pada $\mathcal{K}$x$\mathcal{M}$ dengan hasilnya pada $\mathcal{M}$ yang memenuhi operasi $\oplus$ bersifat assosiatif, komutatif dan untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ dan $x, y \in \mathcal{M}$ berlaku $\alpha(x \oplus y) = \alpha x \oplus \alpha y$, $(\alpha \oplus \beta)x = \alpha x \oplus \beta x$, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $ex = x$ dan $\varepsilon x = \varepsilon$

Misalkan dibentuk suatu himpunan yang beranggotakan polinomial-polinomial dengan *indeterminate* γ dan koefisiennya bilangan fuzzy

$$\{\, p \mid p = \oplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\, \gamma^i \,,\ \tilde{a}_i \in \mathcal{R}_{max} \,\}$$

untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Untuk selanjutnya, himpunan ini di notasikan dengan $\Re_{max}[\gamma]$ dan dinamakan himpunan polinomial fuzzy. Misalkan p dan q elemen pada $\Re_{max}[\gamma]$ dengan $p = \oplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\, \gamma^i$ untuk $\tilde{a}_i \in \Re_{max}$,, $q = \oplus_{i=0}^{m} \tilde{b}_i\, \gamma^i$ untuk $\tilde{b}_i \in \Re_{max}$. Elemen p dan q dikatakan sama jika $m = n$ dan $\tilde{a}_i = \tilde{b}_i$.

Untuk menyelidiki sifat-sifat yang terdapat pada struktur $\Re_{max}[\gamma]$ terlebih dahulu didefinisikan dua operasi pada $\Re_{max}[\gamma]$ yakni operasi internal $\oplus$ sebagai operasi penjumlahan komponen demi komponen pada polinomial, dan operasi eksternal pergandaan dengan skalar pada $\Re_{max}$.

Untuk setiap p, p', q, q'$\in \Re_{max}[\gamma]$ dengan $p = p$' dan $q = q$'. Misalkan $p = \oplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\, \gamma^i$ untuk $\tilde{a}_i \in \Re_{max}$, dan p'$= \oplus_{i=0}^{m} \tilde{b}_i\, \gamma^i$ untuk $\tilde{b}_i \in \Re_{max}$. Karena $p = p$' , maka $\tilde{a}_i = \tilde{b}_i$ diperoleh $\tilde{a}_{i\ \alpha} = \tilde{b}_{i\ \alpha}$ untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, $i = 1, 2, ..., n$ dan $n = m$. Secara analog, misalkan $q = \oplus_{i=0}^{k} \tilde{c}_i\, \gamma^i$ untuk $\tilde{c}_i \in \Re_{max}$, dan q' $= \oplus_{i=0}^{l} \tilde{d}_{\_}\, \gamma^i$ untuk $\tilde{d}_i \in \Re_{max}$. Karena $q = q$' , maka $\tilde{c}_i = \tilde{d}_i$ diperoleh $\tilde{c}_{i\ \alpha} = \tilde{d}_{i\ \alpha}$ untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, $i = 1, 2, ..., k$ dan $k = l$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $n \geq k$ dan $m \geq l$. Dengan demikian,

$$p \oplus q = (\oplus_{i=0}^{\text{獮}} \tilde{a}_i\, \gamma^i) \oplus (\oplus_{i=0}^{k}\ \tilde{c}_i\, \gamma^i) = \oplus_{i=0}^{n}\ \tilde{t}_i\, \gamma^i \text{ , dengan } \tilde{t}_i = \tilde{a}_i \,\widetilde{\oplus}\, \tilde{c}_i$$

$$p\text{'} \oplus q\text{'} = (\oplus_{i=0}^{m}\ \tilde{b}_i \gamma^i) \oplus (\oplus_{i=0}^{l}\ \tilde{d}_i \gamma^i) = \oplus_{i=0}^{n}\ \tilde{s}_i \gamma^i \text{ , dengan } \tilde{s}_i = \tilde{b}_i \,\widetilde{\oplus}\, \tilde{d}_i$$

Sementara itu, $\tilde{t}_i = \tilde{a}_i \,\widetilde{\oplus}\, \tilde{c}_i$ merupakan himpunan fuzzy yang α-*cut*nya adalah interval $[\underline{a_\alpha} \oplus \underline{c_\alpha}\ ,\ \overline{a_\alpha} \oplus \overline{c_\alpha}]$ untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ dan $[\underline{a_\alpha} \oplus \underline{c_\alpha},\ \overline{a_\alpha} \oplus \overline{c_\alpha}] = [\underline{a_\alpha}, \overline{a_\alpha}] \oplus [\underline{c_\alpha}, \overline{c_\alpha}]$. Karena $\tilde{a}_i = \tilde{b}_i$, maka α-*cut*nya sama, yakni $\tilde{a}_{i\,\alpha} = \tilde{b}_{i\,\alpha}$. Dari sini diperoleh $[\underline{a_\alpha}, \overline{a_\alpha}] = [\underline{b_\alpha}, \overline{b_\alpha}]$, sehingga $\underline{a_\alpha} = \underline{b_\alpha}$, $\overline{a_\alpha} = \overline{b_\alpha}$ dan analog untuk $\tilde{c}_i = \tilde{d}_i$. Disisi lain,

$$\tilde{t}_i \quad = \tilde{a}_i \,\widetilde{\oplus}\, \tilde{c}_i = [\underline{a_\alpha} \oplus \underline{c_\alpha}\, , \overline{a_\alpha} \oplus \overline{c_\alpha}\,] = [\underline{a_\alpha}\, , \overline{a_\alpha}\,] \oplus [\underline{c_\alpha}\, , \overline{c_\alpha}\,] = [\underline{b_\alpha}\, , \overline{b_\alpha}] \oplus [\underline{d_\alpha}\, , \overline{d_\alpha}]$$

$$= [\underline{b_\alpha} \oplus \underline{d_\alpha}\, , \overline{b_\alpha} \oplus \overline{d_\alpha}] = \tilde{b}_i \,\widetilde{\oplus}\, \tilde{d}_i = \tilde{s}_i$$

sehingga berlaku $p \oplus q = p' \oplus q'$. Dengan demikian, operasi internal $\oplus$ yang didefinisikan pada $\Re_{max}[\gamma]$ merupakan operasi yang terdefinisi dengan baik.

Selanjutnya, untuk setiap p, $p' \in \Re_{max}[\gamma]$ dan $\tilde{v}$, $\tilde{w} \in \Re_{max}$ dengan $p = p'$ dan $\tilde{v} = \tilde{w}$, diperoleh

$$\tilde{v}p = \tilde{v}\left(\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\gamma^i \right) = \bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{v}\tilde{a}_i\gamma^i = \bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{x}_i\gamma^i \quad \text{dengan } \tilde{x}_i = \tilde{v}\tilde{a}_i$$

$$\tilde{w}p' = \tilde{w}\left(\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{b}_i\gamma^i \right) = \bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{w}\tilde{b}_i\gamma^i = \bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{y}_i\gamma^i \quad \text{dengan } \tilde{y}_i = \tilde{w}\tilde{b}_i$$

Disini, $\tilde{v}\tilde{a}_i$ merupakan himpunan fuzzy yang α-*cut*nya adalah interval $[\underline{a_\alpha} \otimes \underline{v_\alpha}, \overline{a_\alpha} \otimes \overline{v_\alpha}]$ untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ dan $[\underline{a_\alpha} \otimes \underline{v_\alpha}, \overline{a_\alpha} \otimes \overline{v_\alpha}] = [\underline{a_\alpha}, \overline{a_\alpha}] \otimes [\underline{v_\alpha}, \overline{v_\alpha}]$. Karena $\tilde{a}_i = \tilde{b}_i$, maka α-*cut*nya, sama yakni $\tilde{a}_{i\alpha} = \tilde{b}_{i\alpha}$. Dari sini diperoleh $[\underline{v_\alpha}, \overline{v_\alpha}] = [\underline{w_\alpha}, \overline{w_\alpha}]$. Akibatnya $\underline{v_\alpha} = \underline{w_\alpha}$ dan $\overline{v_\alpha} = \overline{w_\alpha}$. Kemudian,

$$\tilde{x}_i = \tilde{v}\tilde{a}_i = [\underline{a_\alpha} \otimes \underline{v_\alpha}, \overline{a_\alpha} \otimes \overline{v_\alpha}] = [\underline{a_\alpha}, \overline{a_\alpha}] \otimes [\underline{v_\alpha}, \overline{v_\alpha}]$$

$$= [\underline{b_\alpha}, \overline{b_\alpha}] \otimes [\underline{w_\alpha}, \overline{w_\alpha}] = [\underline{b_\alpha} \otimes \underline{w_\alpha}, \overline{b_\alpha} \otimes \overline{w_\alpha}] = \tilde{w}\tilde{b}_i = \tilde{y}_i$$

sehingga diperoleh $\tilde{v}p = \tilde{w}p'$. Dengan demikian, operasi eksternal yang didefinisikan pada $\Re_{max}[\gamma]$ merupakan operasi yang terdefinisi dengan baik.

Untuk selanjutnya akan diselidiki sifat-sifat yang berlaku pada operasi $\widetilde{\oplus}$. Misalkan, untuk p, q, $r \in \Re_{max}[\gamma]$, $p = \bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\gamma^i$ dengan $\tilde{a}_i \in \Re_{max}$, $q = \bigoplus_{i=0}^{m} \tilde{b}_i\gamma^i$ dengan $\tilde{b}_i \in \Re_{max}$ dan $r = \bigoplus_{i=0}^{k} \tilde{c}_i\gamma^i$ dengan $\tilde{c}_i \in \Re_{max}$. Tanpa mengurangi keumuman, diambil $n \geq m \geq k$, sehingga

$$[\, p \widetilde{\oplus} q \,] \oplus r = [\, (\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\gamma^i) \oplus (\bigoplus_{i=0}^{m} \tilde{b}_i\gamma^i)\,] \widetilde{\oplus} (\bigoplus_{i=0}^{k} \tilde{c}_i\gamma^i)$$

$$= [\, (\bigoplus_{i=0}^{n} (\tilde{a}_i \widetilde{\oplus} \tilde{b}_i)\gamma^i)\,] \widetilde{\oplus} (\bigoplus_{i=0}^{k} c_i\gamma^i)$$

$$= \bigoplus_{i=0}^{n} [(\tilde{a}_i \widetilde{\oplus} b_i) \widetilde{\oplus} \tilde{c}_i]\, \gamma^i) = \bigoplus_{i=0}^{n} [\, \tilde{a}_i \widetilde{\oplus} (\tilde{b}_i \widetilde{\oplus} \tilde{c}_i)]\, \gamma^i$$

$$= (\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\gamma^i) \oplus [\, (\bigoplus_{i=0}^{m} (\tilde{b}_i \widetilde{\oplus} \tilde{c}_i)\gamma^i)\,]$$

$$= \left(\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\gamma^i \right) \oplus \left[\left(\bigoplus_{i=0}^{m} \tilde{b}_i\gamma^i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{k} \tilde{c}_i\gamma^i \right) \right]$$

$$= p \oplus [q \oplus r]$$

Dengan demikian, operasi $\oplus$ bersifat assosiatif pada $\Re_{max}[\gamma]$.

Berikutnya akan diselidiki sifat komutatif operasi $\oplus$ pada $\Re_{max}[\gamma]$. Untuk setiap p, $q \in \Re_{max}[\gamma]$ berlaku

$$p \oplus q = \left(\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\gamma^i\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{m} \tilde{b}_i\gamma^i\right) = \bigoplus_{i=0}^{n} (\tilde{a}_i \,\widetilde{\oplus}\, \tilde{b}_i)\gamma^i$$

$$= \bigoplus_{i=0}^{n} (\tilde{b}_i \,\widetilde{\oplus}\, \tilde{a}_i)\gamma^i = \left(\bigoplus_{i=0}^{m} \tilde{b}_i\gamma^i\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\gamma^i\right) = q \oplus p$$

Dengan demikian, operasi $\oplus$ bersifat komutatif pada $\Re_{max}[\gamma]$.

Polinomial nol ε merupakan elemen pada $\Re_{max}[\gamma]$, karena $\varepsilon = \bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\gamma^i$, dengan $\tilde{a}_i = \varepsilon$ adalah himpunan fuzzy dengan α-*cut*nya adalah interval $[\varepsilon, \varepsilon]$. Untuk setiap $p = \bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\gamma^i \in \Re_{max}[\gamma]$ berlaku

$$p \oplus \varepsilon = \left(\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\gamma^i\right) \oplus \left(\bigoplus_{m=0}^{n} \tilde{\varepsilon}\gamma^i\right) = \bigoplus_{i=0}^{n} (\tilde{a}_i \,\widetilde{\oplus}\, \tilde{\varepsilon})\, \gamma^i = \bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\, \gamma^i = p$$

Secara analog, juga berlaku $\varepsilon \oplus p = p$. Dengan demikian, $\Re_{max}[\gamma]$ mempunyai elemen nol yaitu polinomial nol ε.

Untuk selanjutnya akan diselidiki sifat yang yang berlaku pada operasi pergandaan skalar. Untuk setiap $\tilde{v}, \tilde{w} \in \Re_{max}$ dan $p, q \in \Re_{max}[\gamma]$

i. $\tilde{v}\,[\, p \oplus q \,] = \tilde{v}\left[\left(\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\gamma^i\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{m} \tilde{b}_i\gamma^i\right)\right] = \tilde{v}\left[\bigoplus_{i=0}^{n} (\tilde{a}_i \,\widetilde{\oplus}\, \tilde{b}_i)\gamma^i\right]$

$$= \bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{v}(\tilde{a}_i \,\widetilde{\oplus}\, \tilde{b}_i)\gamma^i = \bigoplus_{i=0}^{n} (\tilde{v}\,\tilde{a}_i \,\widetilde{\oplus}\, \tilde{v}\,\tilde{b}_i)\gamma^i$$

$$= \left(\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{v}\,\tilde{a}_i\gamma^i\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{m} \tilde{v}\,\tilde{b}_i\gamma^i\right) = \tilde{v}\left(\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\gamma^i\right) \oplus \tilde{v}\left(\bigoplus_{i=0}^{m} \tilde{b}_i\gamma^i\right)$$

$$= \tilde{v}\, p \oplus \tilde{v}\, q$$

ii. $[\tilde{v} \widetilde{\oplus} \tilde{w}]\, p = [\tilde{v} \widetilde{\oplus} \tilde{w}]\, (\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i \gamma^i) = (\bigoplus_{i=0}^{n} [\tilde{v} \widetilde{\oplus} \tilde{w}]\, \tilde{a}_i \gamma^i)$

$= (\bigoplus_{i=0}^{n} [\tilde{v}\, \tilde{a}_i \widetilde{\oplus} \tilde{w}\, \tilde{a}_i]\, \gamma^i) = (\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{v}\, \tilde{a}_i \gamma^i) \oplus (\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{w} \tilde{a}_{\sim} \gamma^i)$

$= \tilde{v}\, (\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i \gamma^i) \oplus \tilde{w}\, (\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i \gamma^i) = \tilde{v}\, p \oplus \tilde{v}\, p$

iii. $\tilde{v}\, [\, \tilde{w}\, p\,] = \tilde{v}\, [\, \tilde{w}\, (\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i \gamma^i)\,] = \tilde{v}\, [\, \bigoplus_{i=0}^{n} (\tilde{w}\, \tilde{a}_i)\, \gamma^i\,] = [\, \bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{v}\, (\tilde{w}\, \tilde{a}_i)\, \gamma^i\,]$

$= [\, \bigoplus_{i=0}^{n} (\tilde{v}\, \tilde{w})\, \tilde{a}_i\, \gamma^i\,] = (\tilde{v}\, \tilde{w})\, [\, \bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i\, \gamma^i\,] = (\tilde{v}\, \tilde{w})\, p$

Selanjutnya $\tilde{e}\, p = \tilde{e}\, (\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i \gamma^i) = \bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{e} \tilde{a}_i \gamma^i = \bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i \gamma^i = p$ dengan $\tilde{e}$ adalah elemen satuan pada $\Re_{max}$, yakni himpunan fuzzy dengan α-*cut*nya adalah interval $[e,e]$. Kemudian $\tilde{\varepsilon}\, p = \tilde{\varepsilon}\, (\bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{a}_i \gamma^i) = \bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{\varepsilon} \tilde{a}_i \gamma^i = \bigoplus_{i=0}^{n} \tilde{\varepsilon} \gamma^i = \tilde{\varepsilon}$.

Dari uraian sebelumnya, terbukti bahwa operasi internal $\widetilde{\oplus}$ pada $\Re_{max}[\gamma]$ dan operasi eksternal pergandaan skalar yang dikerjakan pada $\Re_{max}[\gamma]$ dan $\Re_{max}$ memenuhi $\oplus$ assosiatif , komutatif dan untuk setiap $\tilde{v}, \tilde{w} \in \Re_{max}$, dan $p, q \in \Re_{max}[\gamma]$ berlaku $\tilde{v}(p \oplus q) = \tilde{v}p \oplus \tilde{v}q$, $(\tilde{v} \oplus \tilde{w})p = \tilde{v}p \oplus \tilde{w}p$, $\tilde{v}(\tilde{w}p) = (\tilde{v}\tilde{w})p$, $\tilde{e}p = p$, serta $\tilde{\varepsilon}p = \varepsilon$. Dengan demikian, memenuhi aksioma-aksioma pada semi modul atas semi ring. Jadi, $\Re_{max}[\gamma]$ merupakan semimodul atas $\Re_{max}$. Dengan kata lain, himpunan polinomial fuzzy merupakan semi modul atas semi ring aljabar max-plus fuzzy.

KESIMPULAN

Operasi internal pada himpunan polinomial fuzzy dan operasi eksternal pada himpunan polinomial fuzzy atas aljabar max-plus fuzzy memenuhi aksioma-aksioma pada semi modul atas semi ring. Dengan demikian, himpunan polinomial fuzzy merupakan semi modul atas semi ring aljabar max-plus fuzzy.

DAFTAR PUSTAKA

Bacelli, F, *et al*. 2001. *Synchronization and Linearity*. New York : John Wiley & Sons.

Rudhito, A, 2007. *Semimodul Bilangan Fuzzy atas Aljabar Max-Plus Bilangan Fuzzy*. Prosiding Seminar Nasional Matematika, F MIPA UPI&IndoMS 2007

------------ 2006. *Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur*. Artikel Berkala MIPA

Susilo, F. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta : Graha Ilmu

Zimmermann, H.J. 1991. *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers, USA