JMP : Volume 4 Nomor 2, Desember 2012, hal. 265 - 270

KETAKSAMAAN TIPE LEMAH UNTUK OPERATOR MAKSIMAL DI RUANG MORREY TAK HOMOGEN YANG DIPERUMUM

Sri Maryani

Universitas Jenderal Soedirman
sri.maryani@unsoed.ac.id

ABSTRACT. *We discuss in this paper a weak type (p, p) inequality (where $1 \leq p < \infty$) for maximal operator on generalized non homogeneous Morrey spaces. Our proof uses the result of Garcia-Cuerva dan Martell (2011).*

Keywords: *weak type inequality, maximal operator,generalized non homogeneous Morrey spaces*

ABSTRAK. *Pada makalah ini dibahas ketaksamaan tipe lemah (p, p) (dengan $1 \leq p < \infty$) untuk operator maksimal di ruang Morrey tak homogen yang diperumum. Bukti ketaksamaan menggunakan hasil dari Garcia-Cuerva dan Martell (2011).*

Kata Kunci: *ketaksamaan tipe lemah, operator maksimal, ruang Morrey tak homogen yang diperumum*

1. PENDAHULUAN

Misalkan μ adalah ukuran Borel di ruang Euclid $\mathbf{R}^d$. Ruang $(\mathbf{R}^d, \mu)$ dikatakan ruang bertipe tak homogen apabila ukuran μ memenuhi *growth condition* orde *n* (dengan $0 < n \leq d$):

$$\mu(B(x,r)) \leq Cr^n, \tag{1}$$

untuk setiap bola buka $B(x,r)$ yang berpusat di *x* dan berjari-jari *r* (Nazarov, dkk., 1998). Catat bahwa konstanta positif *C* pada *growth condition* (1) tidak bergantung pada *x* maupun *r*. Beberapa hasil penelitian di ruang bertipe tak homogen dapat dilihat pada (Gunawan, dkk., 2009; Sawano, 2005; Sihwaningrum, 2010; Terasawa, 2006).

Di ruang bertipe tak homogen, didefinisikan operator M_p^n (untuk $1 \leq p < \infty$ dan $0 < n \leq d$) dengan

$$M_p^n f(x) := \left(M|f|^p(x)\right)^{1/p} = \sup_{r>0} \left(\frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p \, d\mu(y)\right)^{1/p}.$$

Definisi ini analog dengan definisi serupa pada (Nakai, 1994) di ruang bertipe homogen. Jika p = 1, operator M_p^n tidak lain adalah operator M^n , yang diperkenalkan oleh Garcia-Cuerva dan Martell (2001). Operator M^n memenuhi ketaksamaan tipe lemah (1, 1) di ruang Lebesgue tak homogen. Selain itu, M^n juga memenuhi ketaksamaan terboboti berikut ini.

Teorema 1.1. (Garcia-Cuerva dan Martell, 2001) *Untuk bobot w dan sembarang fungsi f di* $\mathbf{R}^d$ *berlaku*

$$\int_{\{x\in\mathbf{R}^d : M^n f(x) > \gamma\}} w(x)\, d\mu(x) \leq \frac{C}{\gamma} \int_{\mathbf{R}^d} |f(x)| M^n w(x) d\mu(x)$$

dengan C adalah konstanta positif yang tidak bergantung pada f maupun w.

Dengan menggunakan Teorema 1.1, pada makalah ini akan dibuktikan ketaksamaan tipe lemah (p, p) (dengan $1 \leq p < \infty$) untuk operator maksimal M_p^n di ruang Morrey tak homogen yang diperumum.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ adalah fungsi yang hampir turun, yaitu terdapat konstanta $C > 0$ sehingga $\phi(t) \leq C\, \phi(r)$ apabila $t > s$. Untuk $1 \leq p < \infty$, ruang

Morrey tak homogen yang diperumum $\mathfrak{W}^{p,\phi}(\mu) = \mathfrak{W}^{p,\phi}(\mathbf{R}^{\boldsymbol{d}}, \mu)$ didefinisikan sebagai ruang dari semua fungsi $f \in L^p_{\text{loc}}(\mu)$ dengan

$$\|f : \mathfrak{W}^{p,\phi}(\mu)\| \coloneqq \sup_{r>0} \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

Apabila $\phi(t) = t^{-n/p}$, maka ruang Morrey tak homogen merupakan ruang Lebesgue tak homogen, yakni $\mathfrak{W}^{p,\phi}(\mu) = L^p(\mu)$. Sementara itu, sifat-sifat lain dari ruang Morrey tak homogen yang diperumum dapat dilihat pada (Sihwaningrum, dkk., 2008a dan 2008b).

Kemudian, dengan menggunakan Teorema 1.1, diperoleh ketaksamaan tipe lemah (p, p) untuk operator maksimal.

Teorema 2.1. *Untuk* $\phi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *diasumsikan bahwa* ϕ *merupakan fungsi yang hampir turun. Jika terdapat konstanta* $C_1 > 0$ *sehingga untuk setiap* $r > 0$ *fungsi* ϕ *memenuhi*

$$\int_r^\infty \frac{[\phi(t)]^p}{t}\, dt \le C_1 [\phi(r)]^p,$$

dengan $1 \le p < \infty$, *maka terdapat konstanta* $C > 0$ *sehingga untuk setiap* $\gamma > 0$ *dan untuk setiap bola* $B(a, r)$ *berlaku ketaksamaan*

$$\mu\{x \in B(a, r) : M_p^n f(x) > \gamma\} \le \frac{C}{\gamma^p} r^n (\phi(r))^p \|f : \mathfrak{M}^{p,\phi}(\mu)\|^p.$$

Bukti. Misalkan $\chi_{B(a,r)}$ merupakan fungsi karakteristik dari $B(a, r)$. Untuk setiap $f \in \mathfrak{M}^{p,\phi}$, berlaku

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, dx \, M\chi_{B(a,r)}$$

$$\leq \int_{B(a,2r)} |f(x)|^p \, dx \, M\chi_{B(a,r)} \, d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B(a,2^{k+1}r)\backslash B(a,2^k r)} |f(x)|^p \, dx \, M\chi_{B(a,r)} \, d\mu$$

$$\leq C \left[\int_{B(a,2r)} |f(x)|^p \, dx \, M\chi_{B(a,r)} \, d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B(a,2^{k+1}r)\backslash B(a,2^k r)} |f(x)|^p \, 2^{-kn} \, d\mu \right]$$

$$\leq C \left\{ (2r)^n \left(\phi(2r)\right)^p \left\| f : \mathfrak{M}^{p,\phi} \right\|^p \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kn} (2^{k+1} r)^n \left(\phi(2^{k+1} r)\right)^p \left\| f : \mathfrak{M}^{p,\phi} \right\|^p \right\}$$

$$= C r^n \left\| f : \mathfrak{M}^{p,\phi} \right\|^p \left\{ (\phi(2r))^p + \sum_{k=1}^{\infty} (\phi(2^{k+1} r))^p \right\}$$

$$= C r^n \left\| f : \mathfrak{M}^{p,\phi} \right\|^p \sum_{k=0}^{\infty} (\phi(2^{k+1} r))^p$$

$$\leq C r^n \left\| f : \mathfrak{M}^{p,\phi} \right\|^p \sum_{k=0}^{\infty} (\phi(2^k r))^p.$$

Karena ϕ fungsi yang hampir turun, maka

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, dx \, M\chi_{B(a,r)} \, d\mu \leq C r^n \left\| f : \mathfrak{M}^{p,\phi} \right\|^p \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{(\phi(t))^p}{t} \, dt$$

$$\leq C r^n \left\| f : \mathfrak{M}^{p,\phi} \right\|^p \sum_{k=0}^{\infty} \int_{r}^{\infty} \frac{(\phi(t))^p}{t} \, dt$$

$$\leq C r^n \left\| f : \mathfrak{M}^{p,\phi} \right\|^p (\phi(r))^p \quad .$$

Selanjutnya, dengan Teorema 1.1, terbukti bahwa

$$\mu\left\{ x \in B : M_p^n \, f(x) > \gamma \right\} = \int_{\{x : M|f|^p \, (x) > \gamma^p\}} \chi_{B(a,r)}(x) \, d\mu$$

$$\leq \frac{C}{\gamma^p} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p M\ \chi_{B(a,r)}(x) d\mu$$

$$\leq \frac{Cr^n(\phi(r))^p}{\gamma^p} \left\| f : \mathfrak{M}^{p,\phi}(\mu) \right\|^p . \blacksquare$$

3. KESIMPULAN DAN SARAN

Hasil yang diperoleh pada Teorema 2.1 analog dengan hasil dari Nakai (1994) di ruang Morrey homogeny yang diperumum. Selain itu, teorema tersebut merupakan perumuman dari Teorema 2.1 pada (Sihwaningrum, dkk., 2012).

UCAPAN TERIMAKASIH

Penelitian ini dibiayai oleh DIPA Universitas Jenderal Soedirman melalui Hibah Fundamental dengan kontrak No. 1055.04/UN23.9/PN/2012

DAFTAR PUSTAKA

Garcia-Cuerva, J. dan Martell, J.M. (2001) Two-Weight Norm Inequalities for Maximal Operators and Fractional Integral on Non-Homogeneous Spaces, *Indiana Univ. Math.s J.* **50**(3), 1241–1280.

Gunawan, H., Sawano, Y. dan Sihwaningrum, I. (2009) Fractional Integral Operators in Non-Homogeneous Spaces, *Bull. Aust. Math. Soc.* **80**(2), 324–334.

Nakai, E. (1994) Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators, and Riesz potential on generalized Morrey spaces, *Math. Nachr.* **166,** 95–103.

Nazarov, F., Treil, S. dan Volberg, A. (1998) Weak Type Estimates and Cotlar Inequalities for Calderón-Zygmund Operators on Nonhomogeneous Space, *Internat. Math. Res. Notices* **9**, 463–487.

Sawano, Y. (2005) Sharp Estimates of the Modified Hardy Littlewood Maximal Operator on the Non-homogeneous Space via Covering Lemmas, *Hokkaido Math. J.* **34**, 435–458.

Sihwaningrum, I., Gunawan, H. dan Budhi, W.S. (2008a) Operator Integral Fraksional dan Ketaksamaan Olsen di Ruang Morrey Tak Homogen yang Diperumum, *Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika se-Indonesia*, Universitas Gadjah mada, Yogyakarta, 39–47.

Sihwaningrum, I., Gunawan, H., Soeharyadi, Y. dan W.S. Budhi. (2008b) Generalized Non-homogeneous Morrey Spaces and Olsen Inequality, *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, Universitas Negeri Yogyakarta, Yogyakarta, 1–7.

Sihwaningrum, I., Maryani, S, dan Gunawan, H. (2012) Weak Type Inequalities for Fractional Integral Operators on Generalized Non-homogeneous Morrey Spaces, *Analysis in Theory and Applications,* **28**, 65–72

Terasawa, Y. (2006) Outer Measures and Weak Type (1,1) Estimates of Hardy-Littlewood Maximal Operators*, Journal of Inequalities and Applications.* **46**, 471–497.