LEMMA HENSTOCK PADA INTEGRAL M_α

Muslich
Jurusan Matematika FMIPA UNS
muslich_mus@yahoo.com

ABSTRACT. *Based on the McShane $\delta - fine$ partition and McShane integral, it can be arranged the M_α $\delta - fine$ partition and M_α integral concepts. Furthermore, it is discussed some simple properties of M_α integral and Lemma Henstock.*

Keywords: *Lemma Henstock, McShane partition and McShane integral.*

ABSTRAK. *Berdasarkan konsep partisi McShane $\delta - fine$ dan integral McShane dapat dibangun konsep partisi M_α $\delta - fine$ dan integral M_α. Kemudian dibahas beberapa sifat sederhana integral M_α dan Lemma Henstock.*

Kata Kunci: *Lemma Henstock, partisi McShane dan integral McShane.*

1. PENDAHULUAN

Jenis integral dapat diklasifikasikan menjadi dua macam yaitu jenis integral deskriptif dan jenis integral konstruktif. Akhir-akhir ini ke dua jenis integral tersebut mengalami perkembangan yang cukup pesat. Hubungannya dengan perkembangan jenis integral konstruktif ini Jae Myung Park *et al* [3] berhasil menyusun integral yang dinamakan dengan integral M_α. Integral M_α ini disusun berdasarkan konsep integral McShane. Menurut Jae Myung *et al* [2] maupun Jarolav Kurzweil *et al* [6] dikatakan bahwa integral McShane ekivalen dengan integral Lebesgue dan selanjutnya oleh Tuo-Yeong Lee [7] dikatakan bahwa integral McShane merupakan bentuk integral konstruktif dari integral Lebsgue. Di dalam tulisan ini P dimaksud koleksi pasangan selang titik $\{(I_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$ dengan $I_i \cap I_j = \phi, i \neq j$.

Berdasarkan pasangan selang titik $P = \{(I_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$, baik Gordon [6] maupun D.H. Fremlin [1] mendefinisikan konsep partisi McShane $\delta - fine$ dan integral McShane sebagai berikut.

Definisi 1.1 $P = \{(I_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$ *dikatakan partisi McShane* $\delta -$ *fine pada* $[a,b]$ *jika*

$$I_i \subset (\xi_i - \delta(\xi_i),\ \xi_i + \delta(\xi_i)\,,\ \xi_i \in [a,b]$$

Definisi 1.2 *Fungsi* $f:[a,b] \to R$ *dikatakan terintegral McShane pada* $[a,b]$ *ditulis* $f \in M[a,b]$ *jika terdapat bilangan real A sehingga untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* $\delta(\xi):[a,b] \to R^+$ *sehingga untuk setiap partisi McShane* $\delta -$ *fine* $P = \{(I_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$ *pada* $[a,b]$ *berlaku*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left|I_i\right| - A \right| < \varepsilon$$

Selanjutnya Jae Myung Park *et al* [3] dan Jae Myung Park *et al* [4] mendefinisikan konsep partisi M_α $\delta -$ *fine* pada $[a,b]$ dan integral M_α pada $[a,b]$ sebagai berikut.

Definisi 1.3 $P = \{(I_i, \xi_i)\}$ *dikatakan partisi* M_α $\delta -$ *fine pada* $[a,b]$ *untuk suatu konstan* $\alpha > 0$ *jika* $P = \{(I_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$ *partisi McShane* $\delta -$ *fine pada* $[a,b]$ *dan memenuhi* $\sum_{i=1}^{n} d(\xi_i, I_i) < \alpha$ *dengan* $d(\xi_i, I_i) = \inf\{\, |x - \xi_i| : x \in I_i \}$

Diberikan partisi M_α $\delta -$ *fine* $P = \{(I_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$ pada $[a,b]$ dan fungsi $f:[a,b] \to R$, kemudian dibentuk jumlahan $S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left|I_i\right|$. Dari konsep $S(f,P)$ tersebut didefinisikan integral M_α fungsi *f* pada $[a,b]$ sebagai berikut.

Definisi 1.4 *Diberikan bilangan real* $\alpha > 0$. *Fungsi* $f:[a,b] \to R$ *dikatakan terintegral* M_α *pada* $[a,b]$ *ditulis* $f \in M_\alpha[a,b]$ *jika terdapat bilangan real A sehingga untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* $\delta(\xi):[a,b] \to R^+$ *sehingga untuk setiap partisi* M_α $\delta -$ *fine* $P = \{(I_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$ *pada* $[a,b]$ *berlaku*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left|I_i\right| - A \right| < \varepsilon$$

Bilangan A disebut nilai integral M_α pada $[a,b]$ dan dinotasikan dengan $A=(M_\alpha)\int_{[a,b]} fdx$. Fungsi f terintegral M_α pada $E\subset[a,b]$ jika fungsi $f\chi_E$ terintegral M_α pada $[a,b]$ dan berlaku $(M_\alpha)\int_E f=(M_\alpha)\int_{[a,b]} f\chi_E$.

Berdasarkan konsep integral M_α ini penulis bertujuan untuk membahas kembali tulisan Jae Myung Park *et al* [2] tentang sifat-sifat integral M_α dan Lemma Henstock yang bermanfaat melengkapi pernyataan-pernyataan yang dipandang perlu.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan pada konsep partisi M_α $\delta-fine$ $P=\{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^n$ pada $[a,b]$ dan konsep integral M_α pada $[a,b]$ maka akan dibahas beberapa sifat sederhana integral M_α dan Lemma Henstock. Untuk kemudahan dalam pembahasan $P=\{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^n$ dan $(P)\sum_{i=1}^n f(\xi_i)|I_i|$ berturut-turut cukup ditulis dengan $P=\{(I,\xi)\}$ dan $(P)\sum f(\xi)|I|$.

Teorema 2.1 *Diberikan $f:[a,b]\to R$. Jika fungsi f terintegral M_α pada $[a,b]$ maka nilai integralnya tunggal.*

Bukti. Diberikan sebarang $\varepsilon>0$. Andaikan nilai integral fungsi *f* pada $[a,b]$ tidak tunggal, sebut $A=(M_\alpha)\int_{[a,b]} fdx$ dan $B=(M_\alpha)\int_{[a,b]} fdx$ dengan $A\neq B$, maka terdapat fungsi positif $\delta_1(\xi):[a,b]\to R^+$ sehingga untuk setiap partisi M_α δ_1-fine $P=\{(I,\xi)\}$ pada $[a,b]$ berlaku $\left|(P)\sum f(\xi)|I|-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

dan terdapat fungsi positif $\delta_2(\xi):[a,b]\to R^+$ sehingga untuk setiap partisi M_α $\delta_2 -$ *fine* $P=\{(I,\xi)\}$ pada $[a,b]$ berlaku $\left|(P)\sum f(\xi)|I|-B\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Didefinisikan fungsi positif $\delta\ (\xi):[a,b]\to R^+$ dengan $\delta\ (\xi)=\min\{\delta_1(\xi),\delta_2(\xi)\}$, maka untuk setiap partisi M_α $\delta -$ *fine* $P=\{(I,\xi)\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\begin{aligned}|A-B| &= \left|A-(P)\sum f(\xi)|I|+(P)\sum f(\xi)|I|-B\right| \\ &\le \left|A-(P)\sum f(\xi)|I|\right|+\left|(P)\sum f(\xi)|I|-B\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon>0$ maka *A*=*B*, jadi pengandaian salah yang benar nilai integral M_α fungsi f pada $[a,b]$ adalah tunggal.

Teorema 2.2 $M_\alpha[a,b]$ *merupakan ruang linear yaitu jika* $f,g:[a,b]\to R$ *terintegral* M_α *pada* $[a,b]$ *dan k bilangan real maka* $f+g$ *dan* kf *terintegral* M_α *pada* $[a,b]$ *dan berlaku*

a. $(M\alpha)\int_{[a,b]}(f+g)dx=(M\alpha)\int_{[a,b]}fdx+(M\alpha)\int_{[a,b]}gdx$

b. $(M\alpha)\int_{[a,b]}kfdx=k(M\alpha)\int_{[a,b]}fdx$

Bukti. a.Diberikan sebarang $\varepsilon>0$. Diketahui $f,g:[a,b]\to R$ terintegral M_α pada $[a,b]$ maka terdapat fungsi positif $\delta_1(\xi):[a,b]\to R^+$ sehingga untuk setiap partisi M_α $\delta_1 -$ *fine* $P'=\{(I,\xi)\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|(P')\sum f(\xi)|I|-A\right|<\frac{\varepsilon}{2(|k|+1)}$$

dan terdapat fungsi positif $\delta_2(\xi):[a,b]\to R^+$ sehingga untuk setiap partisi M_α $\delta_2 -$ *fine* $P''=\{(I,\xi)\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|(P'')\sum g(\xi)|I|-B\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Didefinisikan fungsi positif $\delta\ (\xi):[a,b]\to R^{+}$ dengan $\delta\ (\xi) = \min\{\ \delta_1(\xi), \delta_2(\xi)\}$, maka untuk setiap partisi $M_\alpha\ \delta - fine\ P = \{(I,\xi)\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|(P)\sum(f+g)(\xi)-(A+B)\right| \le \left|(P)\sum(f(\xi)|I|-A\right| + \left|(P)\sum(g(\xi)|I|-B\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(|k|+1)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi $f+g$ terintegral M_α pada $[a,b]$ dan berlaku

$$(M\alpha)\int_{[a,b]}(f+g)dx = A+B = (M\alpha)\int_{[a,b]} fdx + (M\alpha)\int_{[a,b]} gdx\ .$$

b. Selanjutnya juga berlaku

$$\left|(P')\sum kf(\xi)|I|-kA\right| = |k|\left|(P')\sum f(\xi)|I|-A\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(|k|+1)} < \varepsilon$$

Jadi kf terintegral M_α pada $[a,b]$ dan berlaku

$$(M\alpha)\int_{[a,b]} kfdx = kA = k(M\alpha)\int_{[a,b]} fdx$$

Berikut diberikan Teorema Cauchy yang dapat dipergunakan untuk menentukan kriteria apakah suatu fungsi terintegral M_α pada $[a,b]$.

Teorema 2.3 (Teorema Cauchy) *Diberikan* $f:[a,b]\to R$. *Fungsi f terintegral* M_α *pada* $[a,b]$ *jika hanya jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi postif* $\delta\ (\xi):[a,b]\to R^{+}$ *sehingga untuk setiap dua partisi* $M_\alpha\ \delta - fine\ P' = \{(I,\xi)\}$ *dan* $P'' = \{(I,\xi)\}$ *pada* $[a,b]$ *berlaku*

$$\left|(P')\sum f(\xi)|I| - (P'')\sum f(\xi)|I|\right| < \varepsilon$$

Bukti. a. Syarat perlu.

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$.Diketahui $f:[a,b]\to R$ terintegral M_α pada $[a,b]$ maka terdapat fungsi positif $\delta(\xi):[a,b]\to R^{+}$ sehingga untuk setiap partisi M_α $\delta - fine\ P' = \{(I,\xi)\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|(P')\sum f(\xi)|I| - \int_{[a,b]} f dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dengan demikian untuk setiap partisi M_α $\delta -$ *fine* $P' = \{(I,\xi)\}$ dan $P'' = \{(I,\xi)\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|(P')\sum f(\xi)|I| - (P'')\sum f(\xi)|I|\right|$$

$$\leq \left|(P')\sum f(\xi)|I| - \int_{[a,b]} f dx\right| + \left|\int_{[a,b]} f dx - (P'')\sum f(\xi)|I|\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

b. Syarat cukup. Menurut asumsi untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif $\delta(\xi):[a,b] \to R^+$ sehingga untuk setiap dua partisi M_α $\delta -$ *fine* $P_m = \{(I,\xi)\}$ dan $P_n = \{(I,\xi)\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|(P_m)\sum f(\xi)|I| - (P_n)\sum f(\xi)|I|\right| < \varepsilon$$

Untuk setiap bilangan asli n dipilih fungsi $\delta_n(\xi):[a,b] \to R^+$ sehingga untuk setiap dua partisi M_α $\delta_n -$ *fine* $P_1 = \{(I,\xi)\}$ dan $P_2 = \{(I,\xi)\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|(P_1)\sum f(\xi)|I| - (P_2)\sum f(\xi)|I|\right| < \frac{1}{n}$$

Diasumsikan $\{\delta_n\}$ merupakan baris turun monoton. Untuk setiap bilangan asli n misalkan $P_n = \{(I,\xi)\}$ merupakan partisi M_α $\delta_n -$ *fine* pada $[a,b]$ maka $\{(P_n)\sum f(\xi)|I|\}$ merupakan baris Cauchy, berakibat $\{(P_n)\sum f(\xi)|I|$ konvergen sebut $\lim_{n\to\infty} (P_n)\sum f(\xi)|I| = A$, jadi dapat dipilih bilangan asli terkecil $N > \frac{2}{\varepsilon}$ sehingga untuk $n \geq N$ berakibat $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan berlaku

$$\left|(P_n)\sum f(\xi)|I| - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{khususnya} \quad \left|(P_N)\sum f(\xi)|I| - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Jika $P = \{(I,\xi)\}$ merupakan partisi M_α $\delta_N - fine$ pada $[a,b]$ maka berlaku

$$\left|(P)\sum f(\xi)|I| - A\right| \leq \left|(P)\sum f(\xi)|I| - (P_N)\sum f(\xi)|I|\right| + \left|(P_N)\sum f(\xi)|I| - A\right|$$

$$< \quad \frac{1}{N} \quad + \quad \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \quad \frac{\varepsilon}{2} \quad + \quad \frac{\varepsilon}{2} \quad = \varepsilon$$

Jadi *f* terintegral M_α pada $[a,b]$, dengan demikian teorema terbukti.

Teorema 2.4 *Diberikan* $f:[a,b] \to R$. *Jika f terintegral* M_α *pada* $[a,b]$ *maka f terintegral* M_α *pada setiap selang bagian* $[c,d] \subseteq [a,b]$.

Bukti. Diketahui *f* terintegral M_α pada $[a,b]$, maka menurut Teorema 2.3 untuk setiap $\varepsilon>0$ terapat fungsi postif $\delta(\xi):[a,b] \to R^+$ sehingga untuk setiap dua partisi M_α $\delta - fine$ $P' = \{(I,\xi)\}$ dan $P'' = \{(I,\xi)\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|(P')\sum f(\xi)|I| - (P'')\sum f(\xi)|I|\right| < \varepsilon$$

Ambil sebarang partisi M_α $\delta - fine$ $P_2 = \{(I,\xi)\}$ dan $P_3 = \{(I,\xi)\}$ pada $[c,d]$, partisi M_α $\delta - fine$ $P_1 = \{(I,\xi)\}$ pada $[a,c]$ dan partisi M_α $\delta - fine$ $P_4 = \{(I,\xi)\}$ pada $[d,b]$ maka mudah dipahami bahwa

$$P' = P_1 \cup P_2 \cup P_4$$

$$P'' = P_1 \cup P_3 \cup P_4$$

merupakan partisi M_α $\delta - fine$ pada $[a,b]$ sehingga diperoleh

$$\left|(D_2)\sum f(\xi)|I| - (D_3)\sum f(\xi)|I|\right| \leq \left|(P')\sum f(\xi)|I| - (P'')\sum f(\xi)|I|\right| < \varepsilon$$

Karena P_2 dan P_3 sebarang partisi M_α $\delta-$ *fine* pada $[c,d]$, menurut Teorema 2.3 maka fungsi *f* terintegral M_α pada $[c,d]$ untuk setiap $[c,d] \subseteq [a,b]$.

Teorema 2.5 *Diberikan* $f:[a,b]\to R$. *Jika f terintegral* M_α *pada* $[a,c]$ *dan* $[c,b]$ *maka f terintegral* M_α *pada* $[a,b]$ *dan berlaku*

$$(M\alpha)\int_{[a,b]} fdx = (M\alpha)\int_{[a,c]} fdx + (M\alpha)\int_{[c,b]} fdx.$$

Bukti. Diberikan sebarang $\varepsilon>0$ dan misalkan $A=(M_\alpha)\int_{[a,c]} fdx$ dan $B=(M_\alpha)\int_{[c,b]} fdx$ maka terdapat fungsi positif $\delta_1(\xi):[a,c]\to R^+$ sedemikian hingga untuk setiap partisi M_α δ_1- *fine* $P'=\{(I,\xi)\}$ pada $[a,c]$ berlaku:

$$\left|(P')\sum f(\xi)|I|-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

dan terdapat fungsi positif $\delta_2(\xi):[c,b]\to R^+$ sedemikian hingga untuk setiap partisi M_α δ_2- *fine* $P''=\{(I,\xi)\}$ pada $[c,b]$ berlaku

$$\left|(P'')\sum f(\xi)|I|-B\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Didefinisikan fungsi positif $\delta(\xi):[a,b]\to R^+$ dengan

$$\delta(\xi) = \begin{cases} \min\{\delta_1(\xi), c-\xi\}, & jika \quad \xi\in[a,c) \\ \min\{\delta_1(c),\delta_2(c)\}, & jika\ \xi=c \\ \min\{\delta_2(\xi), \xi-c\}, & jika \quad \xi\in(c,b] \end{cases}$$

Apabila $P=\{(I,\xi)\}$ merupakan partisi M_α $\delta-$ *fine* pada $[a,b]$ maka c merupakan salah satu titik partisinya, dan mudah dipahami jika $P=P_1\cup P_2$ dengan $P_1=\{(I,\xi)\}$ dan $P_2=\{(I,\xi)\}$ berturut-turut merupakan partisi M_α $\delta-$ *fine* pada $[a,c]$ dan $[c,b]$ maka berlaku

$$\begin{aligned}\left|(P)\sum f(\xi)|I|-(A+B)\right| &\le \left|(P_1)\sum(f(\xi)|I|-A\right| + \left|(P_2)\sum(g(\xi)|I|-B\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon>0$ maka f terintegral M_α pada $[a,b]$ dan berlaku

$$(M\alpha)\int_{[a,b]} fdx = A+B = (M\alpha)\int_{[a,c]} fdx + (M\alpha)\int_{[c,b]} gdx\,.$$

Teorema 2.6 (Lemma Henstock) *Diberikan* $f:[a,b]\to R$. *Jika* f *terintegral* M_α *pada* $[a,b]$ *yaitu untuk setiap* $\varepsilon>0$ *terdapat fungsi positif* $\delta\,(\xi):[a,b]\to R^+$ *sehingga untuk setiap partisi* M_α $\delta-$ *fine* $P=\{(I,\xi)\}$ *pada* $[a,b]$ *berlaku*

$$\left|(P)\sum f(\xi)|I| - \int_{[a,b]} f\right| < \varepsilon$$

maka untuk setiap partisi M_α $\delta-$ *fine bagian* $P'=\{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^m$ *dari* $P=\{(I,\xi)\}$ *berlaku*

$$\left|(P')\sum_{i=1}^m f(\xi_i)|I_i| - \sum_{i=1}^m \int_{I_i} f(\xi_i)\right| < 2\varepsilon$$

***Bukti*.** Diberikan $\varepsilon>0$

Misalkan $P'=\{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^m$ adalah partisi M_α $\delta-$ *fine* bagian dari $P=\{(I,\xi)\}$ dengan $I_1,I_2,...,I_m$ adalah selang-selang pada partisi P', sedangkan $I_1^{'},I_2^{'},...,I_k^{'}$ adalah selang-selang sisanya sehingga $[a,b]=(\bigcup_{i=1}^m I_i)\cup(\bigcup_{j=1}^k I_j^{'})$. Karena f terintegral M_α pada $[a,b]$ maka f terintegral M_α pada $I_j^{'}$ untuk setiap $j=1,2,3,...,k$, dengan demikian terdapat fungsi positif $\delta_j(\xi):I_j^{'}\to R^+$ sehingga untuk setiap partisi M_α $\delta_{\mathrm{j}}-$ *fine* P_j pada $I_j^{'}$ berlaku

$$\left|(P_j)\sum f(\xi)|I| - \int_{I_j^{'}} f\right| < \frac{\varepsilon}{k}$$

Dibentuk $P=P'\cup(\bigcup_{j=1}^k P_j)$ maka P merupakan partisi M_α δ $-$ *fine* pada $[a,b]$ dan berlaku

$$\left|(P)\sum f(\xi)|I| - \int_{[a,b]} f\right| = \left|(P')\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)|I_i| + \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)|I_j^{'}| - \int_{[a,b]} f\right| < \varepsilon$$

sehingga berakibat

$$\left|(P')\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)|I_i| - \sum_{i=1}^{m}\int_{I_i} f\right|$$

$$= \left|((P)\sum f(\xi)|I| - \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)|I_j|) - (\int_{[a,b]} f - \sum_{j=1}^{k}\int_{I_j^{'}} f)\right|$$

$$\leq \left|(P)\sum f(\xi)|I| - \int_{[a,b]} f\right| + \left|\sum_{j=1}^{k}\int_{I_j^{'}} f - \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)|I_j^{'}|\right|$$

$$\leq \left|(P)\sum f(\xi)|I| - \int_{[a,b]} f\right| + \sum_{j=1}^{k}\left| f(\xi_j)|I_j^{'}| - \int_{I_j^{'}} f\right|$$

$$< \quad \varepsilon \quad + \quad \sum_{j=1}^{k}\frac{\varepsilon}{k} \quad = \; 2\varepsilon.$$

Dengan demikian Teorema terbukti.

3. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan di atas diperoleh beberapa kesimpulan antara lain (i) $M_\alpha[a,b]$merupakan ruang linear dan (ii) bahwa Lemma Henstock berlaku pada integral M_α yaitu jika diberikan fungsi $f:[a,b]\to R$ dan f terintegral M_α pada $[a,b]$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif $\delta\,(\xi):[a,b]\to R^+$ sehingga untuk setiap partisi $M_\alpha\ \delta - fine\ P = \{(I,\xi)\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|(P)\sum f(\xi)|I| - \int_{[a,b]} f\right| < \varepsilon$$

maka untuk setiap partisi $M_\alpha\ \delta - fine$ bagian $P' = \{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^{m}$ dari $P = \{(I,\xi)\}$ berlaku

$$\left|(P')\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)|I_i| - \sum_{i=1}^{m}\int_{I_i} f(\xi_i)\right| < 2\varepsilon .$$

DAFTAR PUSTAKA

D. H. Fremlin, (1994) The Henstock and McShane Integral of Vector Valued Function, *Illionis of Journal Mathematics*, 38(3), 471-479.

Jae Myung Park and Deok Ho Lee, (1996) The Denjoy Extension of The McShane Integral, *Bull. Korean Math. Soc.* 33(3), 41-416.

Jae Myung Park, Hyung Won Ryu, and Hoe Kyung Lee, (2010) The -M_α integral, *Journal of The Chungcheong Mathematical Sosiety*, 23(1), 99-108.

Jae Myung Park, Deok Ho Lee, Yu Han Yoon, and Hoe Kyung Lee, (2010) The Integration By Parts For The-M_α integral, *Journal of The Chungcheong Mathematical Sosiety*, 23(4), 861-870.

Jaroslav Kurzweil & S. Schwabik, (1991) *McShane Equiintegrability and Vitali's Convergence Theorem*, e-mail address: kurzweil@math.cas.cz, schwabik@math.cas.cz.

R.A. Gordon, (1994) *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 4, American Mathematical Society.

Tuo-Yeong Lee, (2004) Some full Characterizations of the Strong McShane Integral, *Mathematica Bohemica*, 129(3), 305-312.