JMP : Volume 5 Nomor 1, Juni 2013, hal. 1 - 12

GARIS DI LAPANGAN HIMPUNAN BILANGAN BULAT MODULO 17

Denni Hariati Sinaga, Idha Sihwaningrum, dan Ari Wardayani

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknik
Universitas Jenderal Soedirman

Email : denni_hs@yahoo.com, idhasihwaningrum@yahoo.com,

ariwardayani@yahoo.co.id

ABSTRACT. *In this paper we discuss rational trigonometry in the field* F_{17} *,in particular point, lines and their properties. A unique property in this field is given by the null lines.*

Key words: *rational trigonometry, the field* F_{17} *, line, null line*

ABSTRAK. *Pada artikel ini dikaji trigonometri rasional di lapangan* F_{17} *, khususnya mengenai pengertian titik dan garis beserta sifat-sifatnya. Salah satu sifat unik garis di lapangan ini diberikan oleh garis nol.*

Kata kunci: *Trigonometri rasional, lapangan* F_{17}*, garis, garis nol.*

1. PENDAHULUAN

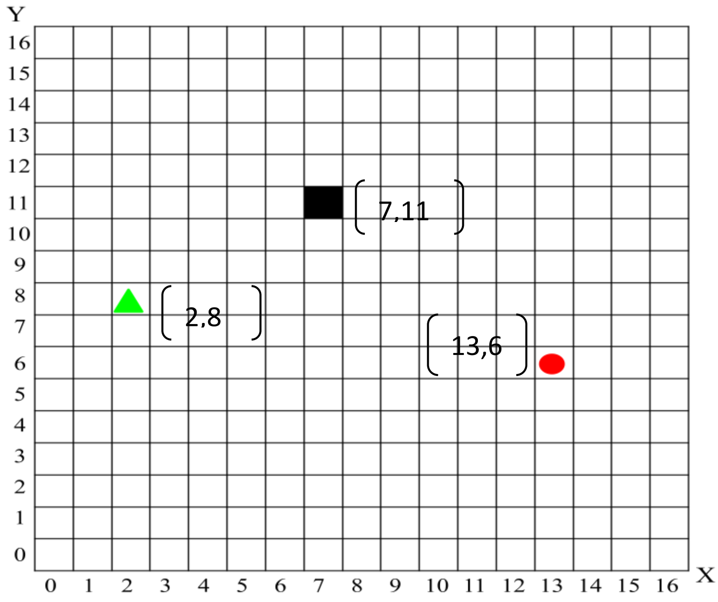
Trigonometri berasal dari bahasa Yunani yaitu *trigonon* dan *metron. Trigonon* berarti segitiga dan *metron* berarti mengukur. Dengan demikian, trigonometri berarti pengukuran segitiga (Rich dan Schmidt, 2003). Trigonometri dibagi menjadi 2 jenis yaitu trigonometri klasik dan rasional. Trigonometri klasik membahas tentang garis dan segitiga pada lapangan himpunan bilangan riil. Sementara itu, trigonometri rasional membahas tentang garis dan segitiga pada berbagai lapangan, misalnya lapangan himpunan bilangan riil, lapangan himpunan bilangan kompleks, lapangan himpunan bilangan rasional, dan lapangan himpunan bilangan bulat modulo *p* (dengan *p* bilangan prima). Jadi, trigonometri rasional mempunyai cakupan lebih luas dibandingkan trigonometri klasik, maka penulis tertarik mengkaji trigonometri rasional, khususnya mengenai garis pada F_p, yaitu lapangan himpunan bilangan bulat modulo *p* (dengan *p* bilangan prima). Pada Wildberger (2005) hanya diberikan contoh titik dan garis di lapangan F_{11} dan F_{13} sehingga pada makalah ini akan dibahas secara lengkap mengenai garis di lapangan F_{17} beserta sifat-sifatnya.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Garis di lapangan F_{17} berbeda dengan garis di lapangan himpunan bilangan riil. Pada lapangan F_{17}, garis direpresentasikan dengan cara menggambar semua titik yang memenuhi persamaan garis tersebut. Oleh sebab itu, subbab ini diawali dengan bahasan mengenai titik di lapangan F_{17}. Pengertian, definisi, dan teorema diambil dari Wildberger (2005), tetapi contoh-contoh dan pembuktian teorema diberikan oleh penulis.

2.1 Titik di Lapangan F_{17}

Koordinat Kartesius pada lapangan F_{17} direpresentasikan oleh persegi besar yang dibagi menjadi 17×17 persegi kecil yang sama besar. Sumbu horizontal X dan sumbu vertikal Y diberi nomor dari 0 sampai 16. Kemudian, titik $[x, y]$ pada koordinat Kartesius di lapangan F_{17} direpresentasikan dengan kotak hitam, lingkaran kecil, segitiga atau simbol lain. Contoh titik pada koordinat Kartesius di lapangan F_{17} diberikan pada gambar berikut.

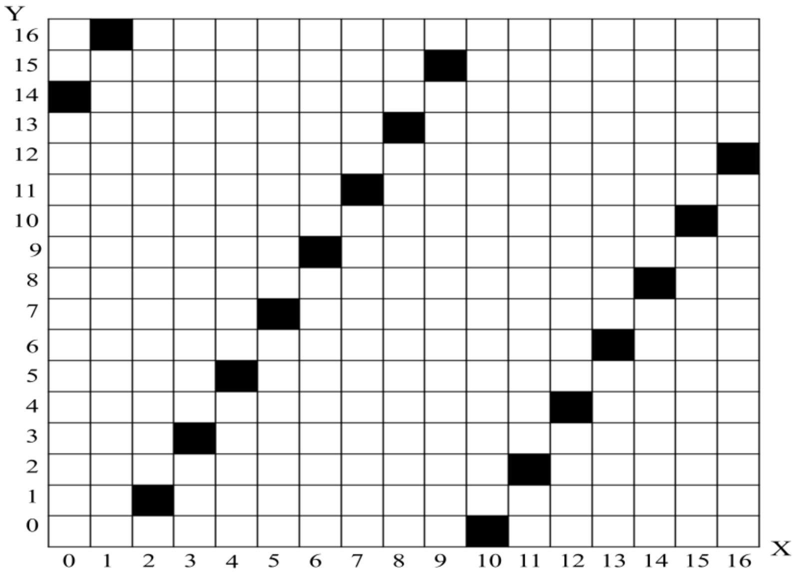


Gambar 1. Titik [2, 8], [7, 11] dan [13, 6] di lapangan F_{17}

Pada Gambar 1, titik [2, 8] direpresentasikan dengan segitiga hijau, titik [7, 11] direpresentasikan dengan kotak hitam, dan titik [13, 6] direpresentasikan dengan lingkaran merah.

2.2 Garis di Lapangan F_{17}

Lapangan F_{17} dilengkapi dengan operasi penjumlahan yang dilambangkan dengan $\oplus_{17}$ dan operasi perkalian yang dilambangkan dengan $\otimes_{17}$. Misal diberikan garis $\ell \coloneqq \langle 3 : 7 : 4 \rangle$ di lapangan F_{17}, maka semua titik $[x, y]$ yang memenuhi persamaan $(3 \otimes_{17} x) \oplus_{17} (7 \otimes_{17} y) \oplus_{17} 4 = 0$ membentuk garis ℓ di lapangan F_{17}. Titik–titik yang memenuhi persamaan tersebut adalah titik [0, 14], [1, 16], [2, 1], [3, 3], [4, 5], [5, 7], [6, 9], [7, 11], [8, 13], [9, 15], [10, 0], [11, 2], [12, 4], [13, 6], [14, 8], [15, 10], dan [16, 12]. Jadi, garis ℓ dapat digambarkan seperti pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Garis $\ell \coloneqq \langle 3 : 7 : 4 \rangle$ di lapangan F_{17}

Kemudian, sembarang dua titik yang berbeda selalu mempunyai jarak. Misalkan titik $A_1 \coloneqq [x_1, y_1]$ dan $A_2 \coloneqq [x_2, y_2]$, maka jarak antara titik A_1 dengan A_2 adalah $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ dan garis yang melalui kedua titik tersebut adalah

$\langle y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1y_2 - x_2y_1 \rangle$. Pada trigonometri rasional, kuadrat dari jarak disebut dengan *quadrance*. Jadi, *quadrance* dari titik A_1 ke titik A_2 adalah $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Akibatnya, titik–titik yang berjarak nol mempunyai *quadrance* nol. Sebagai contoh, di lapangan F_{17} *quadrance* dari titik [1, 0] ke titik [0, 4] adalah nol, sedangkan *quadrance* dari titik [2, 3] ke titik [5, 7] adalah 8. Selanjutnya, titik–titik yang mempunyai *quadrance* nol membentuk garis yang disebut garis nol.

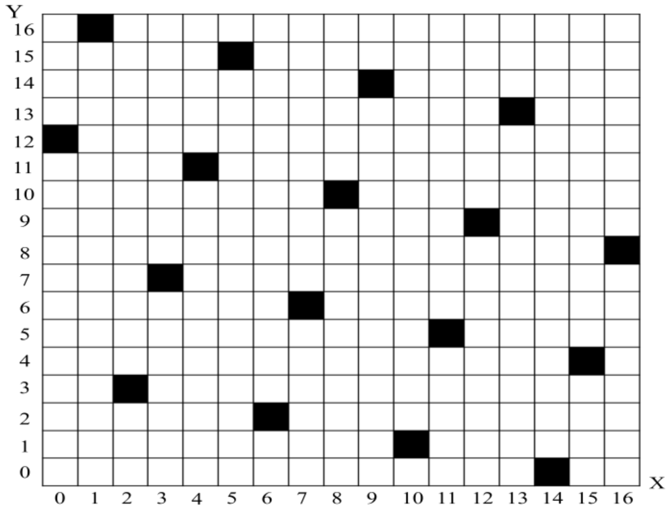
Garis yang melalui titik $[x_1, y_1]$ dan $[x_2, y_2]$ diberikan oleh $\langle y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1y_2 - x_2y_1 \rangle$. Garis tersebut dapat ditulis kembali sebagai $\langle a : b : c \rangle$ dengan $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$, dan $c = x_1y_2 - x_2y_1$. Dengan demikian, garis nol dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1 (Garis Nol). *Garis* $\ell \coloneqq \langle a : b : c \rangle$ *adalah garis nol apabila* $a^2 + b^2 = 0$. *Selain itu, garis* ℓ *disebut garis tak nol.*

Pada lapangan himpunan bilangan riil tidak terdapat garis nol karena *quadrance* antara dua titik yang bernilai nol hanya dipenuhi oleh *quadrance* dari titik ke dirinya sendiri.

Contoh 1

Diberikan garis $\ell \coloneqq \langle 1 : 4 : 3 \rangle$ di lapangan F_{17}. Menurut Definisi 3.1, garis ℓ merupakan garis nol karena $1^2 \oplus_{17} 4^2 = 1 \oplus_{17} 16 = 0$. Gambar 3 berikut adalah gambar garis $\ell \coloneqq \langle 1 : 4 : 3 \rangle$ di lapangan F_{17}.



Gambar 3. Garis nol $\ell \coloneqq \langle 1 : 4 : 3 \rangle$ di lapangan F_{17}

Teorema 2.1. *Untuk setiap titik di lapangan* F_{17}, *terdapat tepat dua garis nol yang melalui titik tersebut.*

Bukti. Ambil sembarang titik $[x, y]$ di lapangan F_{17}. Titik tersebut dilalui oleh garis nol atau garis tak nol. Andaikan titik $[x, y]$ dilalui oleh garis nol $\ell \coloneqq \langle a : b : c_1 \rangle$, maka $(a \otimes_{17} x) \oplus_{17} (b \otimes_{17} y) \oplus_{17} c_1 = 0$ sehingga diperoleh $c_1 = -(a \otimes_{17} x) \oplus_{17} -(b \otimes_{17} y)$. Karena garis ℓ merupakan garis nol, maka

$$a^2 \oplus_{17} b^2 = 0.$$

Padahal, $a^2 = (-a)^2$ dan $b^2 = (-b)^2$ dengan $-a$, $-b$ masing–masing adalah invers dari a dan b terhadap operasi $\oplus_{17}$. Akibatnya,

$$a^2 \oplus_{17} (-b)^2 = 0 \text{ atau } (-a)^2 \oplus_{17} b^2 = 0.$$

Dengan mensubstitusikan $c_1 = -(a \otimes_{17} x) \oplus_{17} -(b \otimes_{17} y)$ ke persamaaan

$$(a \otimes_{17} x) \oplus_{17} (b \otimes_{17} y) \oplus_{17} c_1 = 0,$$

diperoleh persamaan

$$(a \otimes_{17} x) \oplus_{17} (b \otimes_{17} y) \oplus_{17} -(a \otimes_{17} x) \oplus_{17} -(b \otimes_{17} y) = 0.$$

Perhatikan bahwa dengan mengganti nilai b dengan $-b$ pada persamaan

$$(a \otimes_{17} x) \oplus_{17} (b \otimes_{17} y) \oplus_{17} -(a \otimes_{17} x) \oplus_{17} -(b \otimes_{17} y) = 0,$$

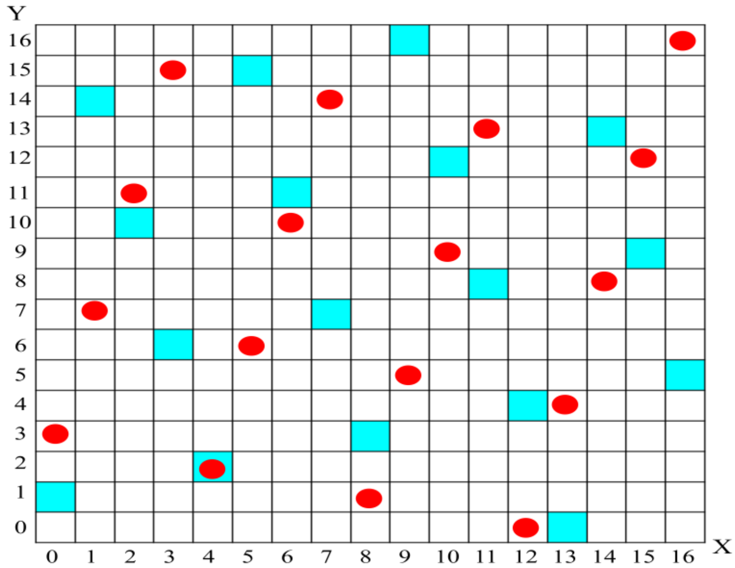
diperoleh persamaan

$$(a \otimes_{17} x) \oplus_{17} (-b \otimes_{17} y) \oplus_{17} -(a \otimes_{17} x) \oplus_{17} (b \otimes_{17} y) = 0.$$

Dengan mengambil $c_2 = -(a \otimes_{17} x) \oplus_{17} (b \otimes_{17} y)$, maka terdapat garis nol lainnya yang melewati titik [x, y] yaitu $\ell_1 \coloneqq \langle a : -b : c_2 \rangle \coloneqq \langle a : -b : -(a \otimes_{17} x) \oplus_{17} (b \otimes_{17} y) \rangle$. Selanjutnya, persamaan $(a \otimes_{17} x) \oplus_{17} (-b \otimes_{17} y) \oplus_{17} -(a \otimes_{17} x) \oplus_{17} (b \otimes_{17} y) = 0$ sama dengan persamaan $(-a \otimes_{17} x) \oplus_{17} (b \otimes_{17} y) \oplus_{17} (a \otimes_{17} x) \oplus_{17} -(b \otimes_{17} y) = 0$. Hal tersebut mengakibatkan, garis $\ell_1 \coloneqq \langle a : -b : -(a \otimes_{17} x) \oplus_{17} (b \otimes_{17} y) \rangle \coloneqq \langle -a : b : (a \otimes_{17} x) \oplus_{17} -(b \otimes_{17} y) \rangle$. Dengan demikian, terbukti bahwa untuk sembarang titik [x, y] dilalui tepat dua garis nol yaitu garis $\ell \coloneqq \langle a : b : c_1 \rangle$ dan $\ell_1 \coloneqq \langle a : -b : -(a \otimes_{17} x) \oplus_{17} (b \otimes_{17} y) \rangle$. ■

Contoh 2

Jika diberikan titik [4, 2] yang dilalui oleh garis nol $\ell_1 \coloneqq \langle 5 : 14 : 3 \rangle$, maka menurut Teorema 3.2, terdapat garis nol lainnya yang melalui titik [4, 2], yaitu garis $\ell_2 \coloneqq \langle a : -b : -(a \otimes_{17} x) \oplus_{17} (b \otimes_{17} y) \rangle \coloneqq \langle 5 : -14 : -(5 \otimes_{17} 4) \oplus_{17} (14 \otimes_{17} 2) \rangle \coloneqq \langle 5 : 3 : 8 \rangle$. Gambar kedua garis nol tersebut diberikan pada Gambar 4. Pada gambar tersebut, garis nol $\ell_1 \coloneqq \langle 5 : 14 : 3 \rangle$ direpresentasikan dengan kotak–kotak biru, sedangkan garis nol $\ell_2 \coloneqq \langle 5 : 3 : 8 \rangle$ direpresentasikan dengan lingkaran–lingkaran merah dan titik [4, 2] direpresentasikan dengan kotak yang terdiri dari kotak biru dan lingkaran merah.

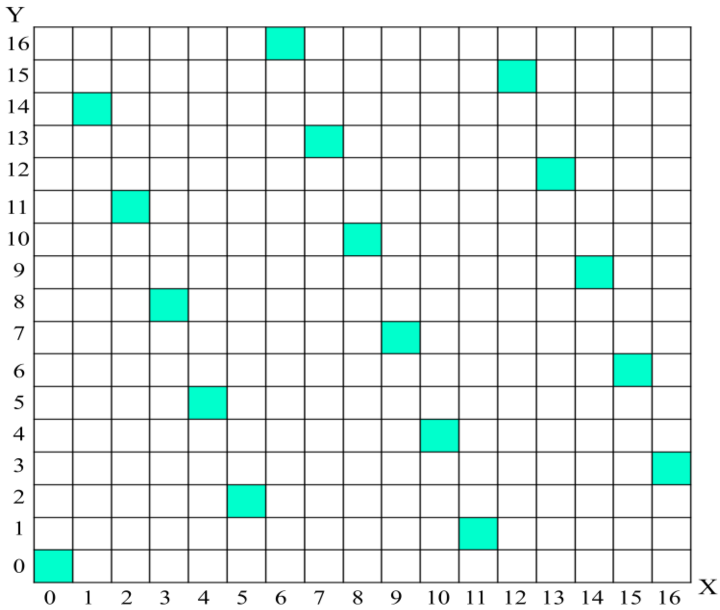


Gambar 4. Titik [4, 2] yang dilalui dua garis nol
$\ell_1 :=\langle 5 : 14 : 3\rangle$ dan $\ell_2 := \langle 5 : 3 : 8\rangle$

Teorema 2.2. *Setiap garis di lapangan* F_{17} *melalui tepat 17 titik.*

Contoh 3

Misal diberikan garis $\ell := \langle 4 : 7 : 0\rangle$ di lapangan F_{17}. Menurut Teorema 3.3, garis ℓ melalui tepat 17 titik. Titik yang dilalui oleh garis ℓ adalah [0, 0], [1, 14], [2, 11], [3, 8], [4, 5], [5, 2], [6, 16], [7, 13], [8, 10], [9, 7], [10, 4], [11, 1], [12, 15], [13, 12], [14, 9], [15, 6], [16, 3]. Garis $\ell := \langle 4 : 7 : 0\rangle$ digambarkan pada Gambar 5 berikut.

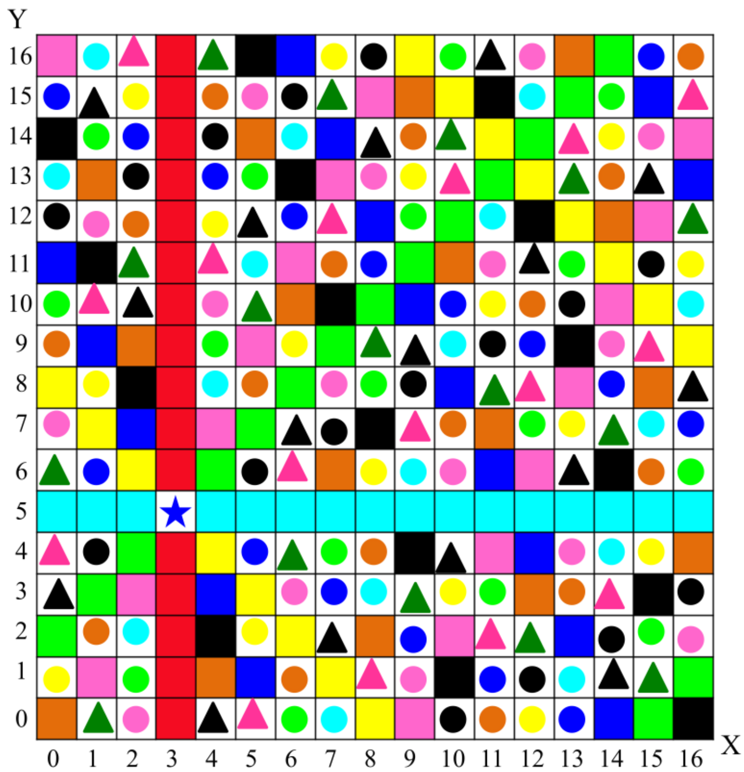


Gambar 5. Garis $\ell \coloneqq \langle 4 : 7 : 0 \rangle$ melalui tepat 17 titik

Teorema 2.3. *Untuk setiap titik di lapangan* F_{17}, *terdapat tepat 18 garis yang melalui titik tersebut.*

Contoh 4

Diberikan titik [3, 5] di lapangan F_{17}. Menurut Teorema 3.4, titik [3, 5] dilalui tepat 18 garis yaitu $\langle 16 : 1 : 15 \rangle$, $\langle 15 : 1 : 1 \rangle$, $\langle 14 : 1 : 4 \rangle$, $\langle 13 : 1 : 7 \rangle$, $\langle 12 : 1 : 10 \rangle$, $\langle 11 : 1 : 13 \rangle$, $\langle 10 : 1 : 16 \rangle$, $\langle 9 : 1 : 2 \rangle$, $\langle 8 : 1 : 5 \rangle$, $\langle 7 : 1 : 8 \rangle$, $\langle 6 : 1 : 11 \rangle$, $\langle 5 : 1 : 14 \rangle$, $\langle 4 : 1 : 0 \rangle$, $\langle 3 : 1 : 3 \rangle$, $\langle 2 : 1 : 6 \rangle$, $\langle 1 : 1 : 9 \rangle$, $\langle 0 : 1 : 12 \rangle$ dan $\langle 16 : 0 : 3 \rangle$. Kedelapan belas garis yang melalui titik [3, 5] diberikan pada Gambar 6. Pada gambar tersebut, titik [3, 5] direpresentasikan dengan bintang biru, sedangkan garis $\langle 16 : 1 : 15 \rangle$ direpresentasikan dengan kotak–kotak hijau, $\langle 15 : 1 : 1 \rangle$ direpresentasikan dengan kotak–kotak merah muda, $\langle 14 : 1 : 4 \rangle$ direpresentasikan dengan lingkaran–lingkaran biru muda, $\langle 13 : 1 : 7 \rangle$ direpresentasikan dengan lingkaran–lingkaran hijau, $\langle 12 : 1 : 10 \rangle$ direpresentasikan dengan lingkaran–lingkaran merah muda, $\langle 11 : 1 : 13 \rangle$ direpresentasikan dengan segitiga–segitiga merah muda, $\langle 10 : 1 : 16 \rangle$ direpresentasikan dengan lingkaran–lingkaran kuning, $\langle 9 : 1 : 2 \rangle$ direpresentasikan dengan lingkaran–lingkaran biru tua, $\langle 8 : 1 : 5 \rangle$ direpresentasikan dengan lingkaran–lingkaran hitam, $\langle 7 : 1 : 8 \rangle$ direpresentasikan dengan lingkaran–lingkaran cokelat, $\langle 6 : 1 : 11 \rangle$ direpresentasikan dengan segitiga–segitiga hijau, $\langle 5 : 1 : 14 \rangle$ direpresentasikan dengan segitiga–segitiga hitam, $\langle 4 : 1 : 0 \rangle$ direpresentasikan dengan kotak–kotak cokelat, $\langle 3 : 1 : 3 \rangle$ direpresentasikan dengan kotak–kotak hitam, $\langle 2 : 1 : 6 \rangle$ direpresentasikan dengan kotak–kotak biru tua, $\langle 1 : 1 : 9 \rangle$ direpresentasikan dengan kotak–kotak kuning, $\langle 0 : 1 : 12 \rangle$ direpresentasikan dengan kotak–kotak biru muda, dan garis $\langle 16 : 0 : 3 \rangle$ direpresentasikan dengan kotak–kotak merah tua. Garis $\langle 13 : 1 : 7 \rangle$ dan $\langle 4 : 1 : 0 \rangle$ merupakan garis nol karena $13^2 \oplus_{17} 1^2 = 0$ dan $4^2 \oplus_{17} 1^2 = 0$.



Gambar 6. Garis–garis yang melalui titik [3, 5]

2.3 Garis Sejajar dan Tegak Lurus

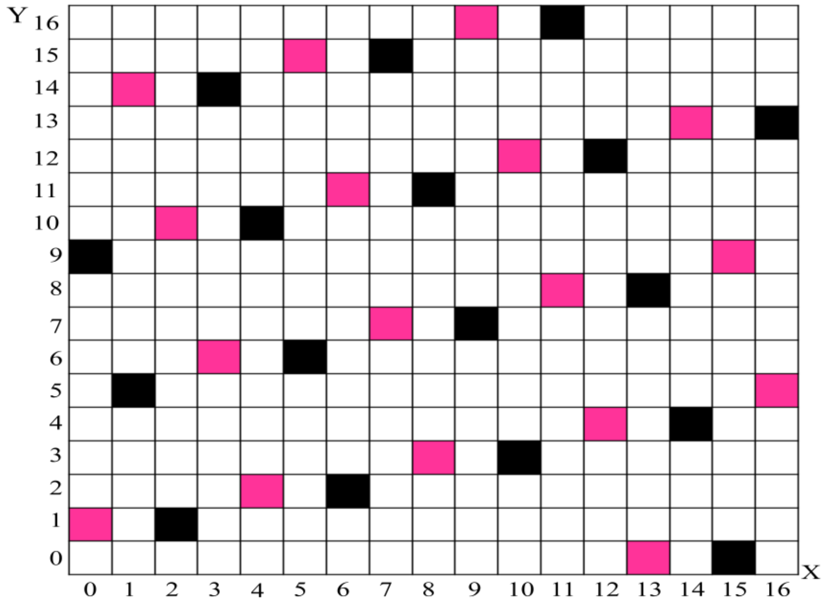
Pada sub bab ini, dibahas mengenai garis sejajar dan tegak lurus di lapangan F_{17}. Garis $\ell_1 \coloneqq \langle a_1 : b_1 : c_1\rangle$ dan $\ell_2 \coloneqq \langle a_2 : b_2 : c_2\rangle$ sejajar apabila $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Kedua garis tersebut tegak lurus apabila $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

Teorema 3.4. *Jika garis ℓ_1 dan ℓ_2 sejajar dan sekaligus tegak lurus, maka kedua garis tersebut adalah garis nol.*

Bukti. Misalkan garis $\ell_1 \coloneqq \langle a_1 : b_1 : c_1\rangle$ dan $\ell_2 \coloneqq \langle a_2 : b_2 : c_2\rangle$ di lapangan F_{17}. Karena garis ℓ_1, ℓ_2 sejajar dan tegak lurus, maka $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ dan $\frac{a_1}{b_1} = \frac{-b_2}{a_2}$. Ini memberikan $\frac{a_2}{b_2} = \frac{-b_2}{a_2}$ sehingga diperoleh $a_2^{\,2} \oplus_{17} b_2^{\,2} = 0$. Jadi, ℓ_2 merupakan garis nol. Kemudian, karena $\frac{a_1}{b_1} = \frac{-b_2}{a_2}$ maka $\frac{a_2}{b_2} = -\frac{-b_1}{a_1}$. Akibatnya, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{-b_1}{a_1}$. Dengan kata lain, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{-b_1}{a_1}$ sehingga $a_1^{\,2} \oplus_{17} b_1^{\,2} = 0$. Jadi, ℓ_1 merupakan garis nol. ■

Contoh 5

Diberikan garis $\ell_1 \coloneqq \langle 2 : 9 : 4\rangle$ dan $\ell_2 \coloneqq \langle 15 : 8 : 9\rangle$. Garis ℓ_1 dan ℓ_2 sejajar karena $(2 \otimes_{17} 8) \ominus_{17} (9 \otimes_{17} 15) = 16 \ominus_{17} 16 = 0$. Garis ℓ_1 dan ℓ_2 juga tegak lurus karena $(2 \otimes_{17} 15) \oplus_{17} (9 \otimes_{17} 8) = 13 \oplus_{17} 4 = 0$. Karena garis ℓ_1 dan ℓ_2 sejajar dan sekaligus tegak lurus, maka menurut Teorema 3.5 kedua garis tersebut merupakan garis nol. Gambar kedua garis tersebut diberikan pada Gambar 7. Pada gambar tersebut, garis $\ell_1 \coloneqq \langle 2 : 9 : 4\rangle$ direpresentasikan dengan kotak–kotak hitam, sedangkan garis $\ell_2 \coloneqq \langle 15 : 8 : 9\rangle$ direpresentasikan dengan kotak–kotak merah.



Gambar 7. Garis $\ell_1 \coloneqq \langle 2 : 9 : 4 \rangle$ dan $\ell_2 \coloneqq \langle 15 : 8 : 9 \rangle$ sejajar dan sekaligus tegak lurus

3. KESIMPULAN DAN SARAN

3.1 Kesimpulan

Pada lapangan F_{17}, garis direpresentasikan dengan cara menggambar semua titik yang dilalui garis tersebut. Pada lapangan ini, terdapat garis nol yaitu garis yang titik-titiknya mempunyai *quadrance* (kuadrat dari jarak) bernilai nol. Garis nol mempunyai sifat bahwa untuk setiap titik di lapangan F_{17}, terdapat tepat dua garis nol yang melalui titik tersebut. Kemudian, secara umum sifat-sifat garis di lapangan F_{17} adalah setiap garis di lapangan F_{17} melalui tepat 17 titik dan untuk setiap titik di lapangan F_{17} terdapat tepat 18 garis yang melalui titik tersebut. Selain itu, jika dua garis yang berbeda di lapangan F_{17} sejajar dan sekaligus tegak lurus, maka kedua garis tersebut merupakan garis nol.

3.2 Saran

Dalam makalah ilmiah ini dibahas mengenai garis di lapangan F_{17}. Hasil yang diperoleh dapat digunakan untuk penelitian lanjut mengenai segitiga di lapangan F_{17}.

DAFTAR PUSTAKA

Rich, B. dan Philip, A. S.(2003), *Schaum's Outlines of Elementary Algebra,* 3rd Edition, New York: McGraw-Hill.

Wildberger, N.J.(2005), *Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry*, Australia: Wild Egg Pty Ltd.