Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP)
Vol. 11 No. 1, Juni 2019, hal. 33-44
ISSN (Cetak) : 2085-1456; ISSN (*Online*) : 2550-0422

SIFAT ISOMORFIK PADA OPERASI TENSOR, BINTANG, CARTESIUS, DAN MODULAR DUA GRAF *FUZZY*

Triyani

Universitas Jenderal Soedirman
Email : trianisr@yahoo.com.au

Bambang Hendriya Guswanto

Universitas Jenderal Soedirman

Nurhayati

Universitas Jenderal Soedirman

ABSTRACT. *This article discusses about some isomorphic properties of tensor, star, Cartesius, and modular product operations of two fuzzy graphs. The results of research are the tensor product of two fuzzy graphs is isomorphic, and if* G_1 *and* G_2 *are complete fuzzy graphs then* $G_1 * G_2 \cong G_2 * G_1$, $\overline{G_1 * G_2} \cong G_2 \times G_1$, $\overline{G_1 \times G_2} \cong G_2 \square G_1$ *and* $G_1 \square G_2 \cong G_2 \otimes G_1$.

Keywords*: isomorphic properties, modular product, star product, tensor product, two fuzzy graphs,.*

ABSTRAK. Artikel ini membahas sifat-sifat isomorfik pada operasi perkalian tensor, bintang, Cartesius, dan modular dua graf *fuzzy*. Hasil penelitian menunjukkan bahwa perkalian tensor dua graf *fuzzy* bersifat isomorfik, dan jika G_1 serta G_2 graf *fuzzy* lengkap maka $G_1 * G_2 \cong G_2 * G_1$, $\overline{G_1 * G_2} \cong G_2 \times G_1$, $\overline{G_1 \times G_2} \cong G_2 \square G_1$, dan $G_1 \square G_2 \cong G_2 \otimes G_1$.

Kata Kunci: dua graf *fuzzy*, perkalian tensor, perkalian bintang, perkalian modular, sifat-sifat isomorfik.

1. PENDAHULUAN

Graf *fuzzy* merupakan pasangan fungsi yang menyatakan himpunan titik *fuzzy* dan himpunan sisi *fuzzy* yang dilengkapi dengan derajat keanggotaan. Titik *fuzzy*dan sisi *fuzzy* memiliki derajat keanggotaan bilangan riil yang berada dalam interval 0 sampai dengan 1. Berbeda dengan graf *fuzzy*, pada graf klasik setiap titik dan sisi memiliki derajat keanggotaan 0 atau 1. Apabila terdapat sisi yang menghubungkan dua buah titik maka derajat keanggotaan sisi tersebut 1 dan apabila tidak ada sisi yang menghubungkan dua buah titik maka derajat keanggotaan sisi tersebut nol.

Banyak konsep pada graf klasik yang digeneralisasi ke dalam graf *fuzzy*. Yeh dan Bang (1975) memperkenalkan keterhubungan pada graf *fuzzy*. Sunitha dan Kumar (2002) mendefinisikan operasi union dan join, perkalian Cartesius, komposisi pada dua graf *fuzzy*. Nagoorgani dan Malarvizhi (2008) membahas tentang homomorfik dan isomorfik pada graf *fuzzy* beserta sifat-sifatnya yang berkaitan dengan orde, ukuran, derajat titik dan relasi ekuivalensi. Selain itu juga dijelaskan syarat cukup dan perlu untuk menyatakan duagraf *fuzzy* isomorfik. Nirmala dan Vijaya (2012) menjelaskan derajat titik pada graf *fuzzy* hasil operasi komposisi, perkalian Cartesius, perkalian tensor dan perkalian normal pada graf *fuzzy*. Selanjutnya, Nagoorgani dan Latha (2014) menjelaskan sifat isomorfik pada operasi komposisi dan operasi perkalian Cartesius dua graf *fuzzy* lengkap. Kemudian, Triyani dkk. (2017) menjelaskan bahwa hasil operasi perkalian modular dua graf *fuzzy* bersifat isomorfik .Pada artikel ini, penulis tertarik untuk menyelidiki sifat-sifat isomorfik pada operasi perkalian tensor, perkalian bintang, perkalian Carteisus,dan perkalian modular dua graf *fuzzy*.

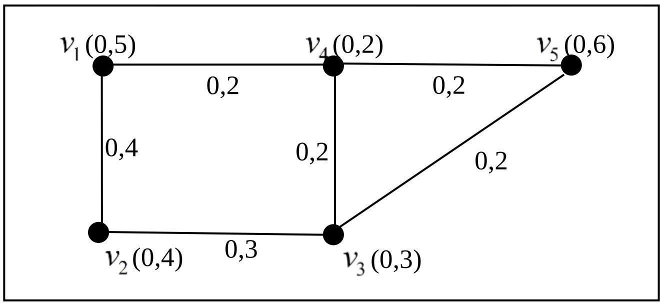
Tujuan dari penulisan artikel ini adalah menyelidiki sifat-sifat isomorfik pada operasi perkalian tensor, perkalian bintang, perkalian Cartesius, dan perkalian modular dua graf *fuzzy*. Graf yang digunakan adalah graf *fuzzy* yang tidak memiliki sisi ganda *fuzzy* dan tidak memiliki *loop fuzzy*.
Definisi yang digunakan dalam artikel ini diambil dari Mordeson dan Nair (2000), Malarvizhi (2010), Sunitha dan Kumar (2002), Nagoorgani dan Malarvizhi (2008), dan Dogra (2015).

Definisi 1.1 Graf *Fuzzy*. *Misalkan V adalah himpunan titik tak kosong. Graf fuzzy* $G=(\sigma,\mu)$ *terdiri atas sepasang fungsi*

(i) $\sigma : V \rightarrow [0,1]$

(ii) $\mu : V \times V \to [0,1]$ *yang merupakan relasi fuzzy simetris sedemikian sehingga* $\mu(v_i, v_j) \le \min\{\sigma(v_i), \sigma(v_j)\}, \forall v_i, v_j \in V$.

Notasi $\sigma(v_i)$ menyatakan derajat keanggotaan titik v_i dan notasi $\mu(v_i, v_j)$ menyatakan derajat keanggotaan sisi yang menghubungkan titik *fuzzy* v_i dan v_j . Pada artikel ini, graf *fuzzy* yang digunakan adalah graf *fuzzy* yang tidak memiliki sisi ganda *fuzzy* dan *loop fuzzy* sehingga $\mu(v_i, v_i) = 0$ untuk setiap $v_i \in V$. Selanjutnya, derajat keanggotaan sisi dengan notasi $\mu(v_i, v_j)$ dapat ditulis dengan $\mu(v_i v_j)$. Gambar 1 merupakan graf *fuzzy*.



Gambar 1. Graf *fuzzy* $G = (\sigma, \mu)$

Definisi 1.2 Graf Dasar dari Graf *Fuzzy*. *Graf dasar dari graf fuzzy* $G = (\sigma, \mu)$ *dinotasikan sebagai* $G^* = (V, E)$ *dengan himpunan titik tak kosong* V *dan* $E \subseteq V \times V$ *adalah graf fuzzy dengan setiap titik dan sisi di* $G = (\sigma, \mu)$ *mempunyai derajat keanggotaan 1.*

Definisi 1.3 Graf *Fuzzy* Lengkap. *Misalkan diberikan himpunan titik tak kosong* V *dan* supp $(\sigma_k) = \{v \in V \mid \sigma_k(v) > 0\}$. *Graf fuzzy* $K = (\sigma_k, \mu_k)$ *dinamakan graf fuzzy lengkap jika memenuhi* $\mu_k(v_i v_j) = \sigma_k(v_i) \wedge \sigma_k(v_j)$ *untuk setiap* v_i, v_j *pada* supp (σ_k).

Definisi 1.4 Komplemen Graf *Fuzzy*. *Misalkan diberikan himpunan titik tak kosong* V *dan graf fuzzy* $G=(\sigma,\mu)$. *Komplemen graf fuzzy* $G=(\sigma,\mu)$ *dinotasikan dengan* $\bar{G}=(\bar{\sigma},\bar{\mu})$, *adalah pasangan fungsi* $\bar{\sigma}=\sigma$ *dan* $\bar{\mu}(uv)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)-\mu(uv)$ *untuk setiap* $u,v\in V$.

Definisi 1.5 Operasi Perkalian Cartesius. *Misalkan graf* $G_1=(\sigma_1,\mu_1)$ *dan graf* $G_2=(\sigma_2,\mu_2)$ *adalah graf fuzzy dengan graf dasarnya secara berurutan* $G_1^*=(V_1,E_1)$ *dan* $G_2^*=(V_2,E_2)$. *Hasil perkalian Cartesius* G_1 *dan* G_2 *adalah pasangan fungsi* $(\sigma_1\times\sigma_2,\mu_1\times\mu_2)$ *dengan himpunan titik dan himpunan sisinya didefinisikan oleh*

$$V=\{(u,v)\,|\,u\in V_1 \text{ dan } v\in V_2\},$$
$$E=\{(u_1,u_2)(v_1,v_2)|u_1=v_1,u_2v_2\in E_2\}\cup\{(u_1,u_2)(v_1,v_2)|u_2=v_2,u_1v_1\in E_1\}$$

yang masing-masing memiliki derajat keanggotaan:

(*i*) $(\sigma_1\times\sigma_2)((u,v))=\sigma_1(u)\wedge\sigma_2(v)$ *dengan* $u\in V_1$ dan $v\in V_2$;

(*ii*) $(\mu_1\times\mu_2)((u_1,u_2)(v_1,v_2))=\begin{cases}\sigma_1(u_1)\wedge\mu_2(u_2v_2), & \text{jika } u_1=v_1 \text{ dan } u_2v_2\in E_2\\ \sigma_2(u_2)\wedge\mu_1(u_1v_1), & \text{jika } u_2=v_2 \text{ dan } u_1v_1\in E_1\end{cases}.$

Definisi 1.6 Operasi Perkalian Tensor. *Misalkan graf* $G_1=(\sigma_1,\mu_1)$ *dan graf* $G_2=(\sigma_2,\mu_2)$ *adalah graf fuzzy dengan graf dasarnya secara berurutan* $G_1^*=(V_1,E_1)$ *dan* $G_2^*=(V_2,E_2)$. *Perkalian tensor* G_1 *dan* G_2 *adalah pasangan fungsi* $(\sigma_1\otimes\sigma_2,\mu_1\otimes\mu_2)$ *dengan himpunan titik dan himpunan sisinya didefinisikan oleh*

$$V=\{(u,v)\,|\,u\in V_1 \text{ dan } v\in V_2\},$$
$$E=\{(u_1,u_2)(v_1,v_2)\,|\,u_1v_1\in E_1,u_2v_2\in E_2\}.$$

yang masing-masing memiliki derajat keanggotaan:

i. $(\sigma_1 \otimes \sigma_2)((u,v)) = \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v)$, $\forall u \in V_1$, $\forall v \in V_2$;

ii. $(\mu_1 \otimes \mu_2)((u_1,v_1)(u_2,v_2)) = \mu_1(u_1u_2) \wedge \mu_2(v_1v_2)$, jika $u_1u_2 \in V_1$ dan $v_1v_2 \in V_2$.

Definisi 1.7 Operasi Perkalian Bintang. *Misalkan graf* $G_1 = (\sigma_1, \mu_1)$ *dan graf* $G_2 = (\sigma_2, \mu_2)$ *adalah graf fuzzy dengan graf dasarnya secara berurutan* $G_1^* = (V_1, E_1)$ *dan* $G_2^* = (V_2, E_2)$. *Hasil perkalian bintang* G_1 *dan* G_2 *adalah pasangan fungsi* $(\sigma_1 * \sigma_2, \mu_1 * \mu_2)$ *dengan himpunan titik dan himpunan sisinya didefinisikan oleh*

$V = \{(u,v) \mid u \in V_1 \ dan \ v \in V_2\}$,

$E = \{(u_1,u_2)(v_1,v_2) \mid u_1 = v_1, u_2v_2 \notin E_2\} \cup \{(u_1,u_2)(v_1,v_2) \mid u_1v_1 \in E_1, u_2v_2 \in E_2\}$,

yang masing-masing memiliki derajat keanggotaan:

(*i*) $(\sigma_1 * \sigma_2)((u,v)) = \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v), \quad \forall u \in V_1$, $\forall v \in V_2$;

(*ii*) $$(\mu_1 * \mu_2)((u_1,u_2)(v_1,v_2)) = \begin{cases} \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) & \forall\ u_1 = v_1 \text{ dan } \forall u_2v_2 \notin E_2 \\ \mu_1(u_1v_1) \wedge \mu_2(u_2v_2), & \forall u_1v_1 \in E_1 \text{ dan } u_2v_2 \in E_2 \end{cases}.$$

Definisi 1.8 Operasi Perkalian Modular. *Misalkan graf* $G_1 = (\sigma_1, \mu_1)$ *dan graf* $G_2 = (\sigma_2, \mu_2)$ *adalah graf fuzzy dengan graf dasarnya secara berurutan* $G_1^* = (V_1, E_1)$ *dan* $G_2^* = (V_2, E_2)$. *Hasil perkalian modular* G_1 *dan* G_2 *adalah pasangan fungsi* $(\sigma_1 \square\ \sigma_2, \mu_1 \square\ \mu_2)$ *dengan*

himpunan titik dan himpunan sisinya didefinisikan oleh

$V = \{(u,v) \mid u \in V_1 \ dan \ v \in V_2\}$,

$E = \{(u_1,u_2)(v_1,v_2) \mid u_1v_1 \in E_1, u_2v_2 \in E_2\} \cup \{(u_1,u_2)(v_1,v_2) \mid u_1v_1 \notin E_1, u_2v_2 \notin E_2\}$

yang masing-masing memiliki derajat keanggotaan:

(*i*) $(\sigma_1 \square\ \sigma_2)((u,v)) = \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v)$, $\forall u \in V_1$, $\forall v \in V_2$;

(*ii*) $$(\mu_1 \square\ \mu_2)((u_1,u_2)(v_1,v_2)) = \begin{cases} \mu_1(u_1v_1) \wedge \mu_2(u_2v_2), \forall u_1v_1 \in E_1, \forall u_2v_2 \in E_2 \\ \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_1(v_1) \wedge \sigma_2(v_2), \forall u_1v_1 \notin E_1, \forall u_2v_2 \notin E_2 \end{cases}.$$

Definisi 1.9 Isomorfik. *Misalkan graf fuzzy* $G=(\sigma,\mu)$ *dan* $G'=(\sigma',\mu')$ *diberikan dengan masing-masing graf dasarnya secara berurutan adalah* $G^*=(V,E)$ *dan* $G'^*=(V',E')$. *Graf fuzzy* $G=(\sigma,\mu)$ *isomorfik dengan graf fuzzy* $G'=(\sigma',\mu')$ *atau dapat ditulis* $G\cong G'$ *apabila terdapat pemetaan bijektif* $h:V\to V'$ *yang memenuhi*

(i) $\sigma(v_i)=\sigma'(h(v_i)),\forall v_i\in V;$

(ii) $\mu(v_iv_j)=\mu'(h(v_i)h(v_j)),\forall v_i,v_j\in V.$

Triyani, dkk. (2017) menjelaskan bahwa hasil operasi perkalian modular dua graf *fuzzy* bersifat isomorfik. Berikut adalah teorema yang telah dibuktikan.

Teorema 1. *Jika* G_1 *dan* G_2 *adalah graf fuzzy maka* $G_1 \square G_2 \cong G_2 \square G_1$

2. METODE PENELITIAN

Tahapan-tahapan yang dilakukandalampenelitianiniadalahsebagaiberikut:

1. Menyelidiki sifat-sifat isomorfik pada operasi perkalian tensor dua graf *fuzzy*;
2. Menyelidiki sifat-sifat isomorfik padaoperasi perkalian bintang dua graf *fuzzy*;
3. Menyelidiki sifat-sifat isomorfik pada operasi perkalian Cartesius dua graf *fuzzy*;
4. Menyelidiki sifat-sifat isomorfik padaoperasi perkalian modular dua graf *fuzzy*.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Selanjutnya, penulis memperoleh beberapa sifat isomorfik pada operasi perkalian tensor, bintang, Cartesius, dan modular dua graf *fuzzy*.Beberapa teorema yang diperoleh adalah sebagai berikut.

Teorema1. *Misalkan diberikan graf fuzzy* $G_1 = (\sigma_1, \mu_1)$ *dan graf fuzzy* $G_2 = (\sigma_2, \mu_2)$. *Hasil operasi perkalian tensor graf fuzzy* G_1 *dan graf fuzzy* G_2 *isomorfik dengan hasil operasi perkalian tensor graf fuzzy* G_2 *dan graf fuzzy* G_1

Bukti. Misalkan diberikan graf *fuzzy* $G_1 = (\sigma_1, \mu_1)$ dan graf *fuzzy* $G_2 = (\sigma_2, \mu_2)$ dengan graf dasarnya secara berurutan adalah $G_1^* = (V_1, E_1)$ dan $G_2^* = (V_2, E_2)$. Diambil sembarang titik $(u,v) \in V_1 \otimes V_2$.Derajat keanggotaan setiap titik dari graf *fuzzy* $G_1 \otimes G_2$ adalah

$$\begin{aligned}
(\sigma_1 \otimes \sigma_2)((u,v)) &= \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) \\
&= \sigma_2(v) \wedge \sigma_1(u) \\
&= (\sigma_1 \otimes \sigma_2)((v,u)) \\
&= (\sigma_2 \otimes \sigma_1)(h((u,v))) \qquad \text{(i)}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, diambil sembarang sisi $(u_1,u_2)(v_1,v_2) \in E_1 \otimes E_2$. Derajat keanggotaan setiap sisi dari graf *fuzzy* $G_1 \otimes G_2$ adalah

$$\begin{aligned}
(\mu_1 \otimes \mu_2)((u_1,u_2)(v_1,v_2)) &= \mu_1(u_1v_1) \wedge \mu_2(u_2v_2) \\
&= \mu_2(u_2v_2) \wedge \mu_1(u_1v_1) \\
&= (\mu_2 \otimes \mu_1)((u_2,u_1)(v_2,v_1)) \\
&= (\mu_2 \otimes \mu_1)(h((u_1,u_2))h((v_1,v_2))) \qquad \text{(ii)}
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (i) dan (ii), terbukti bahwa untuk setiap graf *fuzzy* G_1 dan G_2 berlaku $G_1 \otimes G_2 \cong G_2 \otimes G_1$.

Teorema 2. *Jika* G_1 *dan* G_2 *adalah graf fuzzy lengkapmaka*

1) $G_1 * G_2 \cong G_2 * G_1$
2) $\overline{G_1 * G_2} \cong G_2 \times G_1$
3) $\overline{G_1 \times G_2} \cong G_2 \square G_1$
4) $\overline{G_1 \times G_2} \cong G_2 \square G_1$

Misalkan $G_1 = (\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2 = (\sigma_2, \mu_2)$ adalah graf *fuzzy* lengkap. Graf dasar dari graf *fuzzy* G_1 dan G_2 secara berurutan adalah $G_1^* = (V_1, E_1)$ dan $G_2^* = (V_2, E_2)$.

Bukti.

1). Diambil sembarang titik $(u,v) \in V_1 * V_2$. Derajat keanggotaan setiap titik dari graf *fuzzy* $G_1 * G_2$ adalah

$$\begin{aligned}(\sigma_1 * \sigma_2)((u,v)) &= \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v)\\ &= \sigma_2(v) \wedge \sigma_1(u)\\ &= (\sigma_2 * \sigma_1)((v,u))\\ &= (\sigma_2 * \sigma_1)\big(h((u,v))\big) \qquad \text{(iii)}\end{aligned}$$

Selanjutnya, diambil sembarang sisi $(u_1,u_2)(v_1,v_2) \in E_1 * E_2$. Derajat keanggotaan setiap sisi dari graf *fuzzy* $G_1 * G_2$ adalah

$$\begin{aligned}(\mu_1 * \mu_2)((u_1,u_2)(v_1,v_2)) &= \mu_1(u_1v_1) \wedge \mu_2(u_2v_2)\\ &= \mu_2(u_2v_2) \wedge \mu_1(u_1v_1)\\ &= (\mu_2 * \mu_1)((u_2,u_1)(v_2,v_1))\\ &= (\mu_2 * \mu_1)\big(h((u_1,u_2))h((v_1,v_2))\big) \qquad \text{(iv)}\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (iii) dan (iv), terbukti bahwa jika G_1 dan G_2 graf *fuzzy* lengkap maka $G_1 * G_2 \cong G_2 * G_1$.

2). Diambil sembarang titik $(u,v) \in \overline{V_1 * V_2}$. Derajat keanggotaan setiap titik dari graf *fuzzy* $\overline{G_1 * G_2}$ adalah

$$\begin{aligned}(\overline{\sigma_1 * \sigma_2})((u,v)) &= (\sigma_1 * \sigma_2)((u,v))\\ &= \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) = \sigma_2(v) \wedge \sigma_1(u)\\ &= (\sigma_2 \times \sigma_1)((v,u))\\ &= (\sigma_2 \times \sigma_1)\big(h((u,v))\big) \qquad \text{(v)}\end{aligned}$$

Selanjutnya, diambil sembarang sisi $(u_1,u_2)(v_1,v_2)\in\overline{E_1*E_2}$. Berikut terdapat 6 kasus dari himpunan sisi $\overline{E_1*E_2}$ dituliskan secara berurutan dari kasus 1 sampai dengan kasus 6.

$$\begin{aligned}\overline{E_1*E_2}=&\{(u_1,u_2)(v_1,v_2)\mid u_1=v_1 \text{ dan } u_2v_2\in E_2\}\cup\\&\{(u_1,u_2)(v_1,v_2)\mid u_2=v_2 \text{ dan } u_1v_1\in E_1\}\cup\\&\{(u_1,u_2)(v_1,v_2)\mid u_1v_1\notin E_1 \text{ dan } u_2=v_2\}\cup\\&\{(u_1,u_2)(v_1,v_2)\mid u_1v_1\notin E_1 \text{ dan } u_2v_2\in E_2\}\cup\\&\{(u_1,u_2)(v_1,v_2)\mid u_1v_1\in E_1 \text{ dan } u_2v_2\notin E_2\}\cup\\&\{(u_1,u_2)(v_1,v_2)\mid u_1v_1\notin E_1 \text{ dan } u_2v_2\notin E_2\}.\end{aligned}$$

Kemudian, setiap sisinya dicari derajat keanggotaannya. Untuk kasus 1: $u_1=v_1$ dan $u_2v_2\in E_2$ dan kasus 2: $u_2=v_2$ dan $u_1v_1\in E_1$, derajat keanggotaan sisinya adalah

$$\begin{aligned}\left(\overline{\mu_1*\mu_2}\right)\left((u_1,u_2)(v_1,v_2)\right)&=(\mu_2\times\mu_1)\left((u_2,u_1)(v_2,v_1)\right)\\&=(\mu_2\times\mu_1)\left(h\left((u_1,u_2)\right)h\left((v_1,v_2)\right)\right)\qquad\text{(vi)}\end{aligned}$$

Untuk kasus 3 sampai dengan kasus 6, derajat keanggotaan sisinya adalah

$$\left(\overline{\mu_1*\mu_2}\right)\left((u_1,u_2)(v_1,v_2)\right)=0.$$

Berdasarkan persamaan (v) dan (vi), makadapatdikatakanbahwajika G_1 dan G_2 graf *fuzzy* lengkap maka $\overline{G_1*G_2}\cong G_2\times G_1$.

3). Diambil sembarang titik $(u,v)\in\overline{V_1\times V_2}$. Derajat keanggotaan titik dari graf *fuzzy* $\overline{G_1\times G_2}$ adalah

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{\sigma_1 \times \sigma_2}\right)\left((u,v)\right) &= \left(\sigma_1 \times \sigma_2\right)\left((u,v)\right) \\
&= \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) \\
&= \sigma_2(v) \wedge \sigma_1(u) \\
&= \left(\sigma_2 \square \sigma_1\right)\left((v,u)\right) \\
&= \left(\sigma_2 \square \sigma_1\right)\left(h\left((u,v)\right)\right) \qquad \text{(vii)}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, diambil sembarang sisi $(u_1,u_2)(v_1,v_2) \in \overline{E_1 \times E_2}$. Berikut terdapat 6 kasus dari himpunan sisi $\overline{E_1 \times E_2}$ dan dtuliskan secara beerurutan dari kasus 1 sampai dengan kasus 6.

$$
\begin{aligned}
\overline{E_1 \times E_2} = &\left\{(u_1,u_2)(v_1,v_2) \mid u_1v_1 \in E_1 \text{ dan } u_2v_2 \in E_2\right\} \cup \\
&\left\{(u_1,u_2)(v_1,v_2) \mid u_1 = v_1 \text{ dan } u_2v_2 \notin E_2\right\} \cup \\
&\left\{(u_1,u_2)(v_1,v_2) \mid u_1v_1 \notin E_1 \text{ dan } u_2v_2 \notin E_2\right\} \cup \\
&\left\{(u_1,u_2)(v_1,v_2) \mid u_1v_1 \notin E_1 \text{ dan } u_2 = v_2\right\} \cup \\
&\left\{(u_1,u_2)(v_1,v_2) \mid u_1v_1 \notin E_1 \text{ dan } u_2v_2 \in E_2\right\} \cup \\
&\left\{(u_1,u_2)(v_1,v_2) \mid u_1v_1 \in E_1 \text{ dan } u_2v_2 \notin E_2\right\}.
\end{aligned}
$$

Selanjutnya dicari derajat keanggotaanmasing-masing sisinya. Untuk kasus 1: $u_1v_1 \in E_1$ dan $u_2v_2 \in E_2$, derajat keanggotaan sisinya adalah

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{\mu_1 \times \mu_2}\right)\left((u_1,u_2)(v_1,v_2)\right) &= \left(\mu_2 \square \mu_1\right)\left((u_2,u_1)(v_2,v_1)\right) \\
&= \left(\mu_2 \square \mu_1\right)\left(h\left((u_1,u_2)\right)h\left((v_1,v_2)\right)\right) \qquad \text{(viii)}
\end{aligned}
$$

Untuk kasus 2 sampai dengan kasus 6, derajat keanggotaan sisinya adalah $\left(\overline{\mu_1 \times \mu_2}\right)\left((u_1,u_2)(v_1,v_2)\right) = 0$.

Berdasarkan persamaan (vii) dan (viii) terbukti bahwa jika G_1 dan G_2 graf *fuzzy* lengkap maka $\overline{G_1 \times G_2} \cong G_2 \square G_1$.

4). Diambil sembarang titik $(u,v) \in V_1 \square V_2$. Derajat keanggotaan titik dari graf *fuzzy* $G_1 \square G_2$ adalah

$$\begin{aligned}(\sigma_1 \square \sigma_2)((u,v)) &= \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v)\\ &= \sigma_2(v) \wedge \sigma_1(u)\\ &= (\sigma_2 \otimes \sigma_1)((v,u))\\ &= (\sigma_2 \otimes \sigma_1)(h((u,v))) \qquad \text{(ix)}\end{aligned}$$

Selanjutnya, diambil sembarang sisi $(u_1,u_2)(v_1,v_2) \in E_1 \square E_2$. Derajat keanggotaan setiap sisi dari graf *fuzzy* $G_1 \square G_2$ adalah

$$\begin{aligned}(\mu_1 \square \mu_2)((u_1,u_2)(v_1,v_2)) &= \mu_1(u_1v_1) \wedge \mu_2(u_2v_2)\\ &= \mu_2(u_2v_2) \wedge \mu_1(u_1v_1)\\ &= (\mu_2 \otimes \mu_1)((u_2,u_1)(v_2,v_1))\\ &= (\mu_2 \otimes \mu_1)(h((u_1,u_2))h((v_1,v_2))) \qquad \text{(x)}\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (ix) dan (x), maka dapat dikatakan bahwa jika G_1 dan G_2 adalah graf *fuzzy* lengkap maka $G_1 \square G_2 \cong G_2 \otimes G_1$.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat diambil kesimpulan bahwa hasil operasi perkalian tensor dua graf *fuzzy* bersifat isomorfik, jika G_1 dan G_2 merupakan graf *fuzzy* lengkap maka $G_1 * G_2 \cong G_2 * G_1$, $\overline{G_1 * G_2} \cong G_2 \times G_1$, $\overline{G_1 \times G_2} \cong G_2 \square G_1$, dan $G_1 \square G_2 \cong G_2 \otimes G_1$. Saran untuk penelitian selanjutnya adalah untuk menyelidiki sifat-sifat isomorfik pada operasi perkalian tensor, perkalian bintang, perkalian Cartesius, dan perkalian modular tiga graf *fuzzy*.

DAFTAR PUSTAKA

Dogra, S., *Different Types of Product of Fuzzy Graph*, Progress in Nonlinear Dynamics and Chaos, **3**(1) (2015), 41-56.

Malarvizhi, J., *A Study on Isomorphism and Special Types of Fuzzy Graphs*, Tesis, PG and Research Departement of Mathematics, Bharathidasan University. Tamil Nadu, 2010.

Mordeson, J.N. dan Nair, P. S., *Fuzzy Graphs and Hyperfuzzy Graphs*. Heidelberg: Physica-Verlag, 2000.

Nagoorgani, A. dan Latha, S.R., *Some Properties on Operations of Fuzzy Graph*, Advances in Fuzzy Sets and Systems, **19**(1) (2014), 1-24.

Nagoorgani, A. dan Malarvizhi, J., *Isomorphism on Fuzzy Graphs*, International Journal of Computational and Mathematical Sciences, **2**(4) (2008), 200-206.

Nirmala, G. dan Vijaya, M., *Fuzzy Graphs on Composition, Tensor and Normal Products*, International Journal of Scientific and Research Publication, **2** (2012), 1-7.

Sunitha, M.S., dan Kumar, A.V., *Complement of a Fuzzy Graph*, Indian J. pure appl. Math., **33**(9) (2002), 1451-1464.

Triyani, Baskoro, C., Larasati, N., dan Wardayani, A., *Sifat-sifat Operasi Perkalian Modular pada Graf Fuzzy*, Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika 2017, UniversitasNegeri Yogyakarta, Yogyakarta, 2017, 13-18.