Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP)
Vol. 15 No. 2, Desember 2023, hal. 73-82
ISSN (Cetak) : 2085-1456; ISSN (*Online*) : 2550-0422

# KONTROL OPTIMAL MODEL LESLIE-GOWER DENGAN PEMANENAN PADA POPULASI PREDATOR DAN PERLINDUNGAN PADA *PREY*

**Moh. Nurul Huda***

Jurursan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Mulawarman
muh.nurulhuda@fmipa.unmul.ac.id

**Sri Wigantono**

Jurursan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Mulawarman
sriwigantono@fmipa.unmul.ac.id

**Syaripuddin**

Jurursan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Mulawarman
syarif92@yahoo.co.id

**Rizal Furqan Ramadhan**

Jurusan Manajemen Bisnis Syariah
Universitas Islam Negeri Sayyid Ali Rahmatullah
Rizalfurqann@gmail.com

***ABSTRACT.*** *This paper studied the Leslie-Gower predator-prey model with the effects of prey refuge and linear harvesting on predator populations. Prey populations grow as a logistic model when there is no interaction with predators. The predator population is assumed to have economic value. Analysis of Bionomic and Harvesting Control have been studied further. The results showed that the protective effect of prey had an effect on harvesting activity in the population so that it affected profits in predatory harvests. Simulation of several calculations is given to purchase the analysis results..*

***Keywords****: Linear harvesting, Leslie-Gower Model, Binomics, prey refuge.*

**ABSTRAK.** Artikel ini membahas model predator-prey Leslie-Gower dengan efek perlindungan prey dan pemanenan linear pada populasi predator. Populasi prey tumbuh sebagai model logistik ketika tidak ada interaksi dengan predator. Populasi predator diasumsikan mempunyai nilai ekonomi. Analisis Bionomik dan Kontrol pemanenan telah dikaji lebih lanjut. Hasil penelitian menunjukkan bahwa efek perlindungan prey mempengaruhi terhadap aktivitas pemanenan pada populasi sehingga mempengaruhi laba pada pemanenan predator. Beberapa simulasi perhitungan diberikan untuk mengkonfirmasi hasil analisis.

**Kata Kunci**: Pemanenan linear, Leslie-Gower Model, Bionomik, Perlindungan prey.

*Penulis Korespondensi
Info Artikel : dikirim 15 April 2023; direvisi 11 Sept. 2023; diterima 29 Des. 2023.

## 1. PENDAHULUAN

Dalam pemodelan ekologi, pemanenan merupakan salah satu faktor kunci yang menarik perhatian para peneliti karena pentingnya dalam pengelolaan sumber daya dari sudut pandang biologis dan ekonomi. Ada dua hal penting terkait model predator-*prey* dengan pengaruh pemanenan. Pertama yaitu secara alami menarik minat bagi industri komersial dalam aktivitas pemanenan terhadap suatu sumber daya ekologi karena kekhawatiran eksploitasi berlebihan, dan kepunahan spesies yang dipanen. Menurut [1] Pemanenan memiliki dampak yang kuat pada evolusi dinamis suatu populasi. Pemanenan populasi secara umu dapat diaplikasikan dalam pengelolaan kehutanan, perikanan dan satwa liar. Oleh karena itu, keterlibatan komponen pemanenan akan meningkatkan signifikansi model .

Beberapa penelitian terkait efek pemanena pada model predator-*prey* telah banyak dikaji beberapa tahun ini. [2] mempelajari pemanenan bioekonomi dari model perikanan *prey*-predator berdasarkan konsep *catch-per-unit-effort* pada ikan mangsa dan ikan predator. Konsep yang sama digunakan oleh [3] and [4] untuk mempelajari model *prey*-predator melalui strategi pemanenan mandiri dengan mengasumsikan mangsa dan predator memiliki nilai ekonomi masing-masing sehingga dipanen dengan upaya yang berbeda. Namun, dalam dunia ekologi, beberapa spesies *prey* mempunyai kemampuan dalam melindungi diri nya dari spesies predator. Seperti halnya pada penelitian [5] mempertimbangkan efek pelindungan pada prey dan pemanenan pada model predator-*prey* tipe Leslie-Gower. Namun, pada penelitian [5] belum dikaji tentang kajian bionomik dan kontrol pemanenan yang optimal. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan melengkapi dari kajian  [5] dalam segi pembahasan bionomik dan kontrol pemanenannya.

## 2. MODEL MATEMATIKA

Model yang dikonstruksi berasal dari model Garcia (2023) dengan menambahkan pembahasan tentang bionomik dan kontrol pemanenan. Model ini menggambarkan interaksi dan pertumbuhan antara dua spesies, dengan kemungkinan yang sama untuk dikonsumsi atau dipanen. Fungsi respon pada predator adalah linier atau Fungsi Holling tipe I, artinya bahwa predator mengkonsumsi *prey* meningkat ketika ukuran populasi prey meningkat yang ditentukan oleh tangkapan predator atau tingkat serangan $a > 0$. Jika $x(t), y(t) \geq 0$ adalah ukuran populasi *prey* dan predator, maka kedua populasi diukur dalam jumlah individu, biomassa atau kepadatan per satuan luas atau volume setiap saat $t \geq 0$. Predator dapat dipanen untuk semua $t \geq 0$, dengan $q > 0$ adalah koefisien panen dan $E > 0$ adalah upaya panen. Model ini diasumsikan bahwa pertumbuhan *prey* bergantung pada daya dukung lingkungan $K > 0$ dan pertumbuhan predator di bawah kualitas pemanfaatan *prey* yang dikonsumsi yaitu $n > 0$. Alternatif makanan populasi predator yang tersedia di lingkungan yaitu $c \geq 0$. Sedangkan $r, s > 0$ adalah tingkat pertumbuhan intrinsik *prey* dan predator. Tingkat perlindungan *prey* terhadap serangan predator adalah $m \in [0, 1)$.Model matematika yang menggambarkan dinamika prilaku *prey* $x(t)$ dan predator $y(t)$ dalam penelitian ini sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - ax(1-m)y, \\ \frac{dy}{dt} &= sy\left(1 - \frac{y}{n(1-m)x + c}\right) - qEy. \end{aligned} \tag{1}$$

## 3. KESEIMBANGAN BIONOMIK

Kesetimbangan bionomik merupakan kesetimbangan yang terjadi ketika kesetimbangan sistem biologi dan keseimbangan secara ekonomi saling berintegrasi. Keseimbangan biologi diperoleh ketika populasi berada pada kondisi $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Titik keseimbangan ini diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan (1). Kesetimbangan secara ekonomi dikatakan tercapai ketika total pendapatan total (TR / Total Revenue) yang diperoleh dari penjualan stok (populasi) yang dipanen sama dengan biaya total (TR / Total Cost) dari usaha yang dilakukan dalam pemanenan populasi, artinya haruslah TR = TC.

Fungsi keuntungan dari usaha pemanenan populasi adalah

$$\pi = TR - TC.$$

Total pendapatan (TR) diperoleh dari harga perunit biomassa $p$ dikalikan dengan laju pemanenan $h = qEy$. Sedangkan untuk total biaya (TC) sebanding dengan biaya pemanenan per unit usaha $k$ dikalikan dengan usaha $E$ yang dirumuskan [6]:

$$\pi = ph - kE.$$

Karena itu, persamaan fungsi keuntungan dengan pemanenan yang dilakukan pada populasi predator dan *prey* adalah sebagai berikut:

$$\pi = (pqy - k)E.$$

Kesetimbangan Bionomik terjadi ketika

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - ax(1-m)y = 0, \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = sy\left(1 - \frac{y}{n(1-m)x + c}\right) - qEy = 0, \tag{3}$$

$$\pi(y, E) = (pqy - k)E = 0. \tag{4}$$

Jika $k > pqy$ berarti biaya pemanenan ikan (predator) akan melebihi pendapatan atau menderita kerugian, maka usaha pemanenan ikan harus dihentikan atau $E = 0$. Jadi dalam hal ini kesetimbangan bionomik tidak akan terjadi. Jika $k \leq pqy$ dapat diartikan sebagai biaya pendapatan untuk memanen ikan (predator) melebihi harga jualnya, maka eksistensi kesetimbangan bionomik tetap ada atau $E > 0$.

Dari persamaan (4), didapatkan

$$y^+ = \frac{k}{pq} \tag{5}$$

Subtitusikan persamaan (5) ke persamaan (2), didapatkan

$$x^+ = k + \frac{ak^2}{pqr}(m-1). \tag{6}$$

Subtitusikan persamaan (5) dan (6) ke persamaan (3), sehingga didapatkan

$$E^+ = \frac{s}{q}\left(1 - \frac{y^+}{n(1-m)x^+ + c}\right).$$

Jadi titik kesetimbangan bionomik pada model (2-4) adalah $(y^+, E^+)$.

## 4. KONTROL OPTIMAL PEMANENAN

Hasil berkelanjutan yang optimal dalam dunia perikanan yang memiliki nilai komersial merupakan elemen penting untuk berkontribusi pada pengelolaan sumber daya perikanan yang berkelanjutan [7],[8]. Oleh karena itu, penelitian ini mempelajari hasil pemanenan yang optimal dari model perikanan intraguild (1) dengan memanfaatkan konsep *time discounting* melalui prinsip Pontryagin maksimum. Tingkat pemanenan ikan predator yang optimal dapat ditentukan dengan memaksimalkan fungsi optimalisasi keuntungan moneter:

$$\max \int_0^\infty \left[e^{-\delta t} \cdot \pi(y, E)\right] dt$$

Di sini, $\pi$ mewakili biaya sewa ekonomi seperti yang diberikan dalam Persamaan (4) dan $\delta$ adalah tingkat diskonto perikanan [9]. Dalam model ini, $E(t)$ berfungsi sebagai variabel kontrol yang dibatasi oleh batasan $0 \leq E(t) \leq Emax$ dengan keadaan $x^+, y^+$ yang sesuai. Dengan prinsip maksimum, fungsi Hamiltonian untuk masalah tersebut diberikan oleh

$$\begin{aligned} H = e^{-\delta t} \cdot (pqy - k)E + \lambda_1 \left(rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - ax(1-m)y\right) \\ + \lambda_2 \left(sy\left(1 - \frac{y}{n(1-m)x + c}\right) - qEy\right) \end{aligned} \tag{7}$$

dengan $\lambda_1$ dan $\lambda_2$ sebagai variabel costate. Fungsi *switching* untuk pemanenan ikan predator nonlinier dapat ditentukan sebagai

$$\phi(t) = \frac{\partial H}{\partial E} = e^{-\delta t}(pqy - k) - \lambda_2 qy.$$

Fungsi Hamilton pada persamaan (7) merupakan persamaan linear dalam variabel kontrol / *costate* $\lambda$. Kontrol optimal harus merupakan kombinasi dari kontrol bang-bang dan kontrol singular. Pada kontrol bang-bang, kebijakan pemanenan yang optimal dalam variabel kontrolnya harus memenuhi

$$E(t) = \begin{cases} e^{-\delta t}(pqy - k) - qy > 0, & E^* = E_{max} \\ e^{-\delta t}(pqy - k) - qy < 0, & E^* = 0 \\ e^{-\delta t}(pqy - k) - qy = 0, & \text{kasus singular} \end{cases}$$

atau

$$E(t) = \begin{cases} E_{max}, & \text{jika } \phi > 0 \text{ maka } \lambda(t)e^{-\delta t} < p - \dfrac{k}{qx} \\ E_o^{+} = ?, & \text{jika } \phi = 0 \text{ maka } \lambda(t)e^{-\delta t} = p - \dfrac{k}{qx} \\ 0, & \text{jika } \phi < 0 \text{ maka } \lambda(t)e^{-\delta t} > p - \dfrac{k}{qx} \end{cases}$$

$$\lambda(t)e^{\delta t} = p - \frac{k}{qx}.$$

Adapun $\lambda(t)e^{\delta t}$ merupakan harga bayangan (*shadow price*) dari pemanenan, sementara $p - \frac{k}{qx}$ merupakan pendapatan bersih dari setiap unit pemanenan ikan.

Dalam model ini, ada beberapa kemungkinan kasus. Pertama jika harga bayangan lebih besar dari pada pendapatan bersih per unit pemanenan maka kegiatan pemanenan harus dihentikan supaya tidak terjadi kerugian. Kedua, jika harga bayangan lebih kecil dari pada pendapatan bersih per unit pemanenan maka kegiatan pemanenan harus ditingkatkan.

Menurut Prinsip Pontryagin, fungsi Hamilton mencapai solusi optimal jika berlaku persamaan *state*, *costate* serta kondisi stasioner :

1. Persamaan *state* :

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = f(x,y) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - ax(1-m)y,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = g(x,y) = sy\left(1 - \frac{y}{n(1-m)x + c}\right) - qEy.$$

*2.* Persamaan c*ostate* :

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_1\left(r\left(1 - \frac{2x}{K}\right) - a(1-m)y\right) + \lambda_2\left(\frac{sy^2n(1-m)}{(xn(1-m)+c)^2}\right) \quad (8)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} = pqEe^{-\delta t} + \lambda_1 ax(1-m) + \lambda_2\left(s\left(1 - \frac{2y}{n(1-m)x + c}\right) - qE\right) \quad (9)$$

Dari persamaan (3) diperoleh

$$E = \frac{s}{q}\left(1 - \frac{y}{n(1-m)x + c}\right). \tag{10}$$

Eliminasi $\lambda_1$dengan mensubtitusikan persamaan (8) ke persamaan (9), kemudian subtitusi persamaan (10) ke persamaan (9) sehingga didapatkan

$$\frac{d^2\lambda_2}{dt^2} - \frac{d\lambda_2}{dt}N + \lambda_2 M = Fe^{-\delta t} \tag{11}$$

dengan

$$N = r\left(1 - \frac{2x}{K}\right) - a(1-m)y + \frac{ys}{n(1-m)x + c},$$

$$M = \frac{axsy^2 n(1-m)^2}{(xn(1-m)+c)^2} - \left(\frac{ys}{n(1-m)x + c}\right)\left(r\left(1 - \frac{2x}{K}\right) - a(1-m)y\right),$$

$$F = pqE\left(r\left(1 - \frac{2x}{K}\right) - a(1-m)y - \delta\right).$$

Solusi persamaan (21) adalah

$$\lambda_2(t) = A_1 e^{m_1 t} + A_2 e^{m_2 t} + \frac{F}{\delta^2 + N\delta + M}e^{-\delta t}$$

$A_1$ dan $A_2$ adalah konstantan sembarang. Hal ini dapat dilihat bahwa variable adjoin $\lambda_2(t)$ terbatas jika hanya jika $A_1 = A_2 = 0$, sehingga

$$\lambda_2(t) = \frac{F}{\delta^2 + N\delta + M}e^{-\delta t}. \tag{12}$$

3. Kondisi Stasioner :

Sementara itu kondisi stasioner dituliskan sebagai berikut

$$\frac{\partial H}{\partial E} = e^{-\delta t}(pqy - k) - \lambda_2 qy = 0. \tag{13}$$

Subtitusikan persamaan (12) ke (13), kemudian didapatkan

$$pqy - k - qy\frac{F}{\delta^2 + N\delta + M} = 0. \tag{14}$$

Dari persamaan (4) atau bagian persamaan keuntungan ekonomi dan persamaan (14) yaitu

$$\pi(y,E) = pqy - k = \frac{qyF}{\delta^2 + N\delta + M}.$$

Jika $\delta \to \infty$ maka $\pi(y,E) \to 0$, artinya bahwa jika tingkat diskonto tahunan ditambah menuju tak hingga maka keuntungan ekonomi akan menurun $(\pi = 0)$.

Sebaliknya jika $\delta \to 0$ maka $\pi$ meningkat. Dengan kata lain, keuntungan bergantung kepada laju diskonto. Aktivitas pemanenan akan berhenti jika laju diskonto meningkat. Sementara itu, jika laju diskonto menuju nol atau berkurang maka akan memberikan maksimum dari keuntungan ekonomi,

Solusi kesetimbangan optimal untuk sistem persamaan (2)-(3) dan (14) dalam bentuk $(x_o^+, y_o^+, E_o^+)$ diperoleh dari kombinasi persamaan (13) dengan sistem persamaan (2) dan (3). Kemudian, Parameter-parameter yang memperlihatkan kesetimbangan bionomic dan persamaan ekonomi adalah $a = 1; K = 1; c = 0.2; n = 0.7; r = 0.9; s = 0.07; k = 1.2; p = 7; q = 2.$ Solusi kesetimbangan optimal dengan hadirnya perlindungan *prey* adalah (0.9906047, 0.08455694, 0.02401215), sedangkan tanpa efek perlindungan *prey* $(m = 0)$ yaitu $(0.9063962, 0.08424341, 0.03146662)$. Hasil kesetimbangan bionimik dengan variasi parameter laju perlindungan *prey* disajikan pada tabel 4.1. Hal ini menunjukkan bahwa kesetimbangan optimal dapat eksis pada kedua kasus (ada dan tanpa ada perlindungan *prey*). Kemudian, efek perlindungan *prey* mempengaruhi terhadap aktivitas pemanenan pada populasi predator. Pada kasus tanpa ada perlindungan *prey* aktivitas pemanenan lebih tinggi dari pada kasus dengan adanya perlindungan *prey*.

**Tabel 4.1.** Kesetimbangan bionomik pada model dengan pengaruh perlindungan pada *prey*

| No | Laju perlindungan Pada *Prey* $(m)$ | Titik Kesetimbangan Bionomik $(x^+, y^+, E^+)$. | Fungsi Keuntungan $\pi$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | (2.34285, 0.08571, 0.03318) | 0.09292 |
| 2 | 0.35 | (2.34285, 0.08571, 0.03222) | 0.09022 |
| 3 | 0.5 | (2.34285, 0.08571, 0.03140) | 0.08793 |
| 4 | 0.75 | (2.34285, 0.08571, 0.02792) | 0.07820 |
| 5 | 0.9 | (2.34285, 0.08571, 0.01817) | 0.05088 |

## 5. KESIMPULAN DAN SARAN

Dalam penelitian ini, model predator-predator tipe Leslie-Gower dengan perlinfungan *prey* dan pemanenan predator telah diusulkan dan dipelajari. Dari hasil analisis, parameter pemanenan predator nonlinier $\delta$ merupakan faktor krusial yang mempengaruhi dinamika sistem (1). Pembahasan kontrol optimal pemanenan yang dibahas dalam penelitian ini dapat dianggap sebagai pelengkap literatur yang ada pada refrensi [5]. Efek perlindungan *prey* mempengaruhi terhadap aktivitas pemanenan pada populasi predator. Jadi, dengan mempelajari model predator-*prey* dua spesies yang menggabungkan pemanenan nonlinier Michaelis-Menten, model ini ditemukan efek perlindungan pada populasi *prey* mempengaruhi laba pada pemanenan predator.

## DAFTAR PUSTAKA


[1] S. Kumar and H. Kharbanda, "Chaotic behavior of predator-prey model with group defense and non-linear harvesting in prey," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 119, pp. 19–28, 2019.

[2] M. N. Huda, F. D. T. AMIJAYA, and I. Purnamasari, "the Effect of Harvesting Activities on Prey-Predator Fishery Model With Holling Type Ii in Toxicant Aquatic Ecosystem," *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, vol. 17, no. 2, pp. 1–11, 2020.

[3] T. K. Ang and H. M. Safuan, "Harvesting in a toxicated intraguild predator–prey fishery model with variable carrying capacity," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 126, pp. 158–168, 2019.

[4] M. N. Huda, Q. Q. A'yun, S. Wigantono, H. Sandariria, I. Raming, and A. Asmaidi, "Effects of harvesting and planktivorous fish on bioeconomic phytoplankton-zooplankton models with ratio-dependent response functions and time delays," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 173, no. June, p. 113736, 2023.

[5] C. Cortés García, "Impact of prey refuge in a discontinuous Leslie-Gower model with harvesting and alternative food for predators and linear functional response," *Math. Comput. Simul.*, vol. 206, pp. 147–165, 2023.

[6] L. Prastiwi, "Mangsa-Pemangsa Dengan Waktu Tunda," no. November, pp. 21–25, 2012.

[7] B. R. Soukaina, A. Imane, R. Mostafa, A. Naceur, and E. F. Youssef, "Optimal control of a phytoplankton-zooplankton spatiotemporal discrete bioeconomic model," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 158, p. 112020,

2022.

[8] T. Das, R. N. Mukherjee, and K. S. Chaudhuri, “Harvesting of a prey-predator fishery in the presence of toxicity,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 33, no. 5. pp. 2282–2292, 2009.

[9] S. Lenhart and J. T. Workman, *Optimal Control Applied to Biological Models*. 2007.