

MODEL FRAKSIONAL PREDATOR-PREY PADA KAWASAN KONSERVASI PERAIRAN

Rido Trimanto

Program Studi Matematika, Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta, Indonesia
_rido1800015013@webmail.uad.ac.id

Yudi Ari Adi*

Program Studi Matematika, Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta, Indonesia
yudi.adi@math.uad.ac.id

ABSTRACT. *This paper discusses predator-prey models in water conservation areas in fractional order using Caputo Fabrizio derivatives. The purpose of this research is to study population dynamics in conservation areas. Based on the model, we obtain three equilibrium points. From the analysis of the model, it is found that the extinction equilibrium point of all subpopulations is unstable. Meanwhile, the equilibrium point for the extinction of predator populations is local asymptotic stability under certain conditions. Furthermore, in a certain condition, the coexistence of predator and prey equilibrium points is globally asymptotically stable. Numerical simulations were performed using the Adams Bashfort three-step method with the Caputo Fabrizio derivative to support the theoretical results. Simulations show that the smaller the order, the faster the population converges to the equilibrium point*

Keywords: *Predator-prey model, conservation area, fractional order, equilibrium, stability.*

ABSTRAK. Makalah ini membahas model pemangsa-mangsa di kawasan konservasi perairan dalam orde fraksional menggunakan turunan Caputo Fabrizio. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mempelajari dinamika populasi di kawasan konservasi. Berdasarkan model, kami memperoleh tiga titik kesetimbangan. Dari model tersebut diperoleh bahwa titik kesetimbangan kepunahan semua subpopulasi tidak stabil. Sementara itu, titik keseimbangan kepunahan populasi predator adalah stabil asimtotik lokal dengan kondisi tertentu. Selanjutnya untuk titik kesetimbangan dengan semua populasi ada stabil secara global asimtotik jika memenuhi kondisi tertentu. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan metode Adams Bashfort tiga langkah dengan turunan Caputo Fabrizio untuk mendukung hasil teoritis. Simulasi menunjukkan bahwa semakin kecil order semakin mempercepat populasi konvergen ke titik kesetimbangan.

Kata Kunci: Model pemangsa-mangsa, kawasan konservasi, orde fractional, kesetimbangan, kestabilan

*Penulis Korespondensi

Info Artikel : dikirim 20 Jan. 2023; direvisi 28 Nov. 2023; diterima 29 Des. 2023.

1. PENDAHULUAN

Dinamika populasi pada kawasan konservasi merupakan masalah yang menarik untuk dikaji. Sebagaimana diketahui, dalam beberapa tahun terakhir banyak spesies hewan terancam punah bahkan sebagian lainnya berada di ambang kepunahan. Hal ini terjadi karena berbagai alasan seperti eksploitasi berlebihan, pemangsaan oleh predator yang berlebihan, kesalahan dalam mengurus sumber daya alam dan lain-lain. Untuk menyelamatkan spesies ini diperlukan adanya kajian tentang kawasan konservasi laut sebagai alat penting untuk mempertahankan ekosistem laut dan melestarikan kehidupan laut. Menurut UU No. 31 Tahun 2004, Konservasi sumber daya ikan adalah upaya perlindungan, pelestarian, dan pemanfaatan sumber daya ikan, termasuk ekosistem, jenis, dan genetik untuk menjamin keberadaan, ketersediaan, dan kesinambungannya dengan tetap meningkatkan kualitas nilai dan keanekaragaman sumberdaya ikan. Marine Protected Area (MPA) atau Kawasan Konservasi Perairan (KKP) memiliki manfaat pada ekonomi dan ekologi secara langsung. Kawasan yang dilindungi mempunyai efek kestabilan pada dinamika predator-prey. Hal ini menunjukkan bahwa apabila perikanan dieksploitasi terus menerus pada zona yang tidak dilindungi, populasi perikanan dapat dijaga tetap seimbang di lingkungan alami (Dubey, Chandra, & Sinha, 2002). Menurut Claudet dkk, (2008), kawasan konservasi dapat memberikan pengaruh yang baik terhadap keadaan ekosistem yang ditunjukkan di dalam kawasan MPA Northwestern Mediterranean dengan keanekaragaman jenis ikan yang tinggi dan besarnya kelimpahan ikan, mulai dari jenis ikan besar sampai ikan-ikan kecil jika dibandingkan sebelum kawasan tersebut ditetapkan sebagai MPA.

Berkembangnya pengetahuan tentang dinamika populasi pada kawasan konservasi diharapkan dapat menjaga terpeliharanya keseimbangan antara konservasi dan pemanfaatan sumber daya laut. Hingga saat ini telah banyak penelitian tentang model predator- prey pada zona konservasi, diantaranya adalah Sadhukhan dkk (2018), Agnihotri & Nayyer (2019), dan Mukherjee & Mondal (2020).

Sadhukhan dkk (2018), mempelajari dinamika sistem perikanan dengan

membagi lingkungan perairan laut dalam dua zona, satu zona penangkapan ikan bebas dan zona konservasi. Pada zona penangkapan bebas, pemanenan dan pemangsaan diperbolehkan sedangkan pada zona konservasi tidak diperbolehkan penangkapan dan hanya digunakan untuk membudidayakan ikan-ikan kecil untuk menjaga ekosistem laut stabil. Selanjutnya Agnihotri & Nayyer (2019) membangun model predator-prey pada zona konservasi dimana burung sebagai predator dengan mempertimbangkan fungsi respon Holling tipe II. Pada penelitian ini diperoleh kesimpulan jika sistem dieksploitasi terus-menerus di zona yang tidak dilindungi, bahkan spesies prey tidak akan punah dari suatu sistem dan spesies prey di zona yang tidak dilindungi akan selalu tetap pada tingkat keseimbangan yang sesuai karena migrasi antara dua zona dan pembatasan pemanenan di zona konservasi. Selanjutnya Mukherjee & Mondal (2020) melakukan penelitian model predator-prey dengan menggunakan turunan fraksional tipe Caputo. Model dengan menggunakan turunan order fraksional lebih stabil dan lebih realistis. Mukherjee & Mondal (2020) telah membahas model dengan predator hanya memangsa pada kawasan yang tidak dilindungi dan tidak ada pemanenan.

Tujuan penelitian ini mengkaji model predator-prey dengan orde fraksional dengan turunan fraksional tipe Caputo-Fabrizio. Kelebihan dari turunan fraksional Caputo-Fabrizio adalah terhindar dari singularitas yang terdapat pada turunan fraksional Caputo (Podlubny, 1998; Kilbas dkk., 2006; Petras, 2011). Penelitian akan membahas kasus yang mempertimbangkan pemanenan prey pada kawasan tidak dilindungi.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan studi literatur dengan mengkaji pustaka-pustaka yang relevan. Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah, menentukan rumusan masalah, mengkaji sumber-sumber data yang relevan, membuat model matematika order fraksional, mencari solusi dan titik kesetimbangan, menganalisis kestabilan titik kesetimbangan yang diperoleh, dan terakhir melakukan simulasi numerik.

Berikut ini diberikan konsep dasar yang digunakan dalam pembahasan.

Definisi 1 (Kilbas dkk., 2006) Turunan fraksional Caputo dengan order α didefinisikan sebagai

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{x_0}^x \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \quad (1)$$

dengan $n-1 < \alpha < n$, t_0 merupakan batas bawah dimana $t_0 < t$. Pada kondisi $n = 1$, diperoleh persamaan sebagai berikut

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (2)$$

dengan $0 < \alpha < 1$, t_0 merupakan batas bawah dimana $t_0 < t$.

Selanjutnya diperkenalkan turunan fraksional tipe Caputo-Fabrizio pada definisi berikut.

Definisi 2 (Caputo & Fabrizio, 2015) Diberikan sebuah fungsi $f: [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$, Definisi turunan fraksional tipe Caputo-Fabrizio dengan orde α direpresentasikan dengan persamaan

$${}^{CF} D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_{t_0}^t f'(\tau) \exp\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)\right] d\tau \quad (3)$$

dimana $x > 0$, sebarang orde $\alpha \in (0,1)$, dan $M(\alpha)$ merepresentasikan bentuk normalisasi dengan $M(0) = M(1) = 1$.

Kelebihan dari turunan fraksional ini adalah terhindar dari singularitas yang terdapat pada turunan fraksional Caputo (Podlubny, 1998; Kilbas dkk, 2006; Petras, 2011).

Definisi 3 (Losada & Nieto, 2015) Diberikan sebuah fungsi $f: [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$, definisi integral fraksional tipe Caputo-Fabrizio dengan orde α direpresentasikan dengan persamaan

$${}_{x_0}^{CF} I_x^\alpha f(x) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} f(x) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^x f(t) ds. \quad (4)$$

Berdasarkan definisi sebelumnya, integral fraksional tipe Caputo Fabrizio dari suatu fungsi dari orde $0 < \alpha < 1$ adalah rata-rata antara fungsi f dan integralnya orde satu, sehingga

$$\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} = 1 \quad (5)$$

sehingga diperoleh rumus eksplisit dari $M(\alpha)$,

$$M(\alpha) = \frac{2}{2-\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (6)$$

Lemma 1. (Vargas-De-León, 2015) Misalkan $x(t) \in \mathbb{R}^+$ merupakan fungsi kontinu dan memiliki turunan kontinu. Maka untuk setiap $t \geq t_0$

$${}_{t_0}^C D_t^\alpha x(t) \left[x(t) - x^* - x^* \ln \frac{x(t)}{x^*} \right] \leq \left(1 - \frac{x^*}{x(t)} \right) {}_{t_0}^C D_t^\alpha x(t) \quad (7)$$

dimana $x^* \in \mathbb{R}^+$ dan $\forall \alpha \in (0,1)$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Formulasi Model Matematika

Pemodelan interaksi predator-prey disusun dengan memperhatikan dua kawasan, yaitu di dalam kawasan konservasi dan di luar kawasan konservasi, dengan asumsi diperbolehkan penangkapan prey oleh manusia pada kawasan yang tidak di lindungi. Dalam habitat ini terdapat populasi predator yang dapat memangsa dalam kawasan konservasi dan diluar kawasan konservasi. Diasumsikan pula populasi prey dapat bermigrasi dari kawasan konservasi ke luar kawasan konservasi dan sebaliknya. Berdasarkan asumsi tersebut sehingga dibentuk model dalam sistem persamaan diferensial order fraksional sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
{}^{CF}D_t^\alpha x &= rx \left(1 - \frac{x+y}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{m_1 xz}{\beta+x} - qEx, \\
{}^{CF}D_t^\alpha y &= sy \left(1 - \frac{x+y}{K}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y - \frac{m_1 yz}{\beta+y}, \\
{}^{CF}D_t^\alpha z &= -bz + \frac{m_2 xz}{\beta+x} + \frac{m_2 yz}{\beta+y}.
\end{aligned} \tag{8}$$

dengan x, y , dan z berturut-turut menyatakan populasi prey di kawasan tidak dilindungi, populasi prey di kawasan konservasi, dan populasi predator. Selengkapnya diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Variabel dan parameter

Variabel	Keterangan
$x(t)$	Populasi <i>prey</i> pada kawasan tidak dilindungi pada waktu t
$y(t)$	Populasi <i>prey</i> pada kawasan konservasi pada waktu t
$z(t)$	Populasi <i>predator</i> pada waktu t
r	Koefisien laju pertumbuhan populasi <i>prey</i> pada kawasan tidak dilindungi
s	Koefisien laju pertumbuhan populasi <i>prey</i> pada kawasan konservasi
K	<i>Carrying capacity</i> dari spesies <i>prey</i> pada kawasan tidak dilindungi
L	<i>Carrying capacity</i> dari spesies <i>prey</i> pada kawasan konservasi
σ_1, σ_2	Koefisien laju migrasi
m_1	Tingkat konsumsi maksimum <i>predator</i>
m_2	Tingkat konversi pemangsaan menjadi predator
b	Tingkat kematian alami dari <i>predator</i>
β	Tingkat kejenuhan <i>predator</i>
E	Upaya yang diperlukan untuk memanen <i>prey</i>
q	Laju pemanenan <i>prey</i>

Dari Sistem (8) diperoleh dua solusi ekuilibrium nontrivial, yaitu:

1. Titik kesetimbangan tanpa predator $T_1 = (x_1, y_1, 0)$ dengan

$$y_1 = \frac{rx_1^2 + x_1(K\sigma_1 - rK + qEK)}{K\sigma_2 + rx_1}$$

dan x_1 merupakan solusi non negatif dari persamaan kubik

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

dengan

$$a = r^2\sigma_1$$

$$b = -rK(s(\sigma_1 + \sigma_2 + qE) + 2\sigma_1\sigma_2 - r\sigma_2)$$

$$c = K^2(rs\sigma_1 + 2rs\sigma_2 + Eqs + r\sigma_1\sigma_2 + qEr\sigma_2 + r\sigma_1\sigma_2 - (q^2E^2s + 2qEs\sigma_1 + sqE\sigma_2 + \sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2^2 + r^2\sigma_2 + \sigma_1^2))$$

$$d = K^3\sigma_2(qE + rs + \sigma_1\sigma_2 - (sqE + s\sigma_1 + r\sigma_2)).$$

Titik kesetimbangan $T_1 = (x_1, y_1, 0)$ ada jika $x_1 > \frac{K}{r}(r - \sigma_1 - qE)$.

2. Titik kesetimbangan koeksistensi predator prey $T_2 = (x^*, y^*, z^*)$ dengan

$$y^* = \beta \left[\frac{(m_2 - b)x - \beta b}{\beta(b - m_2) + (b - 2m_2)x} \right],$$

$$z^* = \frac{\beta + x}{Km_2x} \left[KL_3x - rx^2 + (rx - K\sigma_2) \left[-\frac{\beta(L_1x + b\beta)}{\beta L_1 + L_2x} \right] \right]$$

dan x adalah solusi nonnegatif dari persamaan

$$S_1x^6 + S_2x^5 + S_3x^4 + S_4x^3 + S_5x^2 + S_6x + S_7 = 0,$$

dengan

$$S_1 = -L_1L_2^2r > 0$$

$$S_2 = -L_2 \left(((r + s)L_1^2 + L_2L_4L_1 + brL_2)\beta + 2L_2 \left(\left(\sigma_1 - \frac{L_3}{2} \right) L_1 - \frac{\sigma_1L_2}{2} \right) K \right)$$

$$S_3 = -\beta L_2 \left(\beta(L_4L_1^2 + 2bsL_1 + bL_2L_4) + 2 \left(\left(2\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{s}{2} - L_3 \right) L_1^2 - \left(\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2} - \frac{s}{2} + \frac{L_3}{2} \right) L_2L_1 + bL_2 \left(\sigma_1 - \frac{L_3}{2} \right) \right) K \right)$$

$$\begin{aligned}
S_4 = \beta^2 & \left(b((r + s)L_1^2 + bL_2L_4)\beta \right. \\
& - 4 \left(\left(\frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_2}{2} - \frac{s}{4} - \frac{L_3}{4} \right) L_1^3 - L_2(\sigma_1 + \sigma_2 - 2s + 2L_3) \frac{L_1^2}{4} \right. \\
& + bL_2 \left(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{s}{2} - \frac{L_3}{2} \right) L_1 \\
& \left. \left. + \frac{bL_2^2(\sigma_1 - \sigma_2 + s - L_3)}{4} \right) K \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_5 = \beta^3 & \left(b(L_4L_1^2 + b(r + 2s)L_1 + bL_2L_4)\beta \right. \\
& - 2K \left(\left(\frac{s}{2} - \frac{L_3}{2} \right) L_1^3 + b \left(\sigma_1 + 2\sigma_2 - s - \frac{L_3}{2} \right) L_1^2 \right. \\
& \left. \left. + bL_2(\sigma_1 + s - L_3)L_1 + b^2L_2 \left(\sigma_2 - \frac{s}{2} \right) \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_6 = b\beta^4 & \left(b(L_4L_1 + bs)\beta \right. \\
& \left. - K \left((\sigma_1 + \sigma_2 + s - L_3)L_1^2 + 2b \left(\sigma_2 - \frac{s}{2} \right) L_1 + \sigma_2 bL_2 \right) \right),
\end{aligned}$$

$$S_7 = -\beta^5 KL_1 b^2 \sigma_2 < 0,$$

$$L_1 = b - m_2,$$

$$L_2 = L_1 - m_2,$$

$$L_3 = r - \sigma_1 - qE,$$

$$L_4 = r - s.$$

Kestabilan titik kesetimbangan diberikan dalam Teorema 1 dan Teorema 2.

Teorema 1. Titik kesetimbangan $T_1(x_1, y_1, 0)$ stabil asimtotik lokal jika

$$\begin{aligned}
& \left(r - \frac{ry_1}{K} - \frac{2rx_1}{K} - \sigma_1 - qE \right) + \left(s - \frac{sx_1}{K} - \frac{2sy_1}{K} - \sigma_2 \right) < 0, \\
& \left(r - \frac{ry_1}{K} - \frac{2rx_1}{K} - \sigma_1 - qE \right) \left(s - \frac{sx_1}{K} - \frac{2sy_1}{K} - \sigma_2 \right) \\
& > \left(-\frac{rx_1}{K} + \sigma_2 \right) \left(-\frac{sy_1}{K} + \sigma_1 \right).
\end{aligned}$$

Bukti:

Persamaan karakteristik Matriks Jacobian dari Sistem (8) titik T_1 , yaitu

$$\begin{vmatrix} r - \frac{ry_1}{K} - \frac{2rx_1}{K} - \sigma_1 - qE - \lambda & -\frac{rx_1}{K} + \sigma_2 & -\frac{m_1x_1}{\beta + x_1} \\ -\frac{sy_1}{K} + \sigma_1 & s - \frac{sx_1}{K} - \frac{2sy_1}{K} - \sigma_2 - \lambda & -\frac{m_1y_1}{\beta + y_1} \\ 0 & 0 & -b + \frac{m_2x_1}{\beta + x_1} + \frac{m_2y_1}{\beta + y_1} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

mempunyai nilai eigen

$$\lambda_1 = -b + \frac{m_2x_1}{\beta + x_1} + \frac{m_2y_1}{\beta + y_1}$$

Nilai eigen tersebut akan negatif apabila

$$\frac{m_2x_1}{\beta + x_1} + \frac{m_2y_1}{\beta + y_1} < b \tag{9}$$

Nilai eigen yang lainya yaitu diperoleh dari persamaan

$$\begin{aligned} &\lambda^2 - \lambda \left(\left(r - \frac{ry_1}{K} - \frac{2rx_1}{K} - \sigma_1 - qE \right) + \left(s - \frac{sx_1}{K} - \frac{2sy_1}{K} - \sigma_2 \right) \right) \\ &+ \left(r - \frac{ry_1}{K} - \frac{2rx_1}{K} - \sigma_1 - qE \right) \left(s - \frac{sx_1}{K} - \frac{2sy_1}{K} - \sigma_2 \right) \\ &- \left(-\frac{rx_1}{K} + \sigma_2 \right) \left(-\frac{sy_1}{K} + \sigma_1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas diperoleh dua nilai eigen dengan bagian real negatif jika

$$\left(r - \frac{ry_1}{K} - \frac{2rx_1}{K} - \sigma_1 - qE \right) + \left(s - \frac{sx_1}{K} - \frac{2sy_1}{K} - \sigma_2 \right) < 0 \tag{10}$$

$$\left(r - \frac{ry_1}{K} - \frac{2rx_1}{K} - \sigma_1 - qE \right) \left(s - \frac{sx_1}{K} - \frac{2sy_1}{K} - \sigma_2 \right) > \left(-\frac{rx_1}{K} + \sigma_2 \right) \left(-\frac{sy_1}{K} + \sigma_1 \right). \tag{11}$$

Jika kondisi (9), (10), dan (11) terpenuhi, maka titik kesetimbangan $T_1(x_1, y_1, 0)$ stabil asimtotik lokal, sehingga dapat disimpulkan bahwa terjadinya kepunahan pada *predator*. Secara biologis, hal ini dapat disebabkan karena kematian alami *predator* yang tinggi dan interaksi dengan *prey* kecil.

Teorema 2. Titik kesetimbangan $T_2(x^*, y^*, z^*)$ stabil asimtotik lokal jika $C_1 > 0$, $C_3 > 0$, dan $C_1 C_2 - C_3 > 0$, dimana C_1, C_2, C_3 dijelaskan pada pembuktian.

Bukti:

Persamaan karakteristik dari Sistem (8) pada titik $T_2(x^*, y^*, z^*)$ berbentuk

$$\begin{vmatrix} -\frac{rx^*}{K} - \frac{\sigma_2 y}{x} + \frac{m_1 x^* z^*}{(\beta + x^*)^2} - \lambda & -\frac{rx^*}{K} + \sigma_2 & -\frac{m_1 x^*}{\beta + x^*} \\ -\frac{sy}{K} + \sigma_1 & -\frac{sy^*}{K} - \frac{\sigma_1 y}{x} + \frac{m_1 y^* z^*}{(\beta + y)^2} - \lambda & -\frac{m_1 y^*}{\beta + y} \\ \frac{\beta m_2 z^*}{(\beta + x^*)^2} & \frac{\beta m_2 z^*}{(\beta + y^*)^2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

yang dapat ditulis dalam bentuk

$$\lambda^3 + C_1 \lambda^2 + C_2 \lambda + C_3 = 0 \quad (12)$$

dengan

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{rx^*}{K} + \frac{\sigma_2 y^*}{x^*} - \frac{m_1 x^* z^*}{(\beta + x^*)^2} + \frac{sy^*}{K} + \frac{\sigma_1 y^*}{x^*} - \frac{m_1 y^* z^*}{(\beta + y^*)^2} \\ C_2 &= \left(\frac{rx^*}{K} + \frac{\sigma_2 y^*}{x^*} - \frac{m_1 x^* z^*}{(\beta + x^*)^2} \right) \left(\frac{sy^*}{K} + \frac{\sigma_1 y^*}{x^*} - \frac{m_1 y^* z^*}{(\beta + y^*)^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{rx^*}{K} - \sigma_2 \right) \left(-\frac{sy^*}{K} + \sigma_1 \right) + \frac{\beta m_1 m_2 x^* z^*}{(\beta + x^*)^3} + \frac{\beta m_1 m_2 y^* z^*}{(\beta + y^*)^3} \\ C_3 &= \left(-\frac{rx^*}{K} - \frac{\sigma_2 y}{x^*} + \frac{m_1 x^* z^*}{(\beta + x^*)^2} \right) \left(-\frac{\beta m_1 m_2 y^* z^*}{(\beta + y^*)^3} \right) \\ &\quad + \left(-\frac{sy^*}{K} - \frac{\sigma_1 y^*}{x^*} + \frac{m_1 y^* z^*}{(\beta + y^*)^2} \right) \left(-\frac{\beta m_1 m_2 x^* z^*}{(\beta + x^*)^3} \right) \\ &\quad + \left(\frac{rx^*}{K} - \sigma_2 \right) \left(-\frac{m_1 y^*}{\beta + y^*} \right) \left(\frac{\beta m_2 z^*}{(\beta + x^*)^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{sy}{K} - \sigma_1 \right) \left(-\frac{m_1 x^*}{\beta + x^*} \right) \left(\frac{\beta m_2 z^*}{(\beta + y^*)^2} \right) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan kriteria Routh Hurwitz, semua akar persamaan (12) akan memiliki bagian real negatif jika $C_1 > 0$, $C_3 > 0$, dan $C_1 C_2 - C_3 > 0$. Jadi titik kesetimbangan $E_2(x^*, y^*, z^*)$ dari Sistem (8) akan stabil asimtotik lokal apabila syarat $C_1 > 0$, $C_3 > 0$, dan $C_1 C_2 - C_3 > 0$ terpenuhi.

Selanjutnya dibentuk Fungsi Lyapunov

$$V(x, y, z) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$$

dengan

$$V_1(x) = \left[x - x^* - x^* \ln \left(\frac{x}{x^*} \right) \right], \quad V_2(y) = p_1 \left[y - y^* - y^* \ln \left(\frac{y}{y^*} \right) \right],$$

dan

$$V_3(z) = p_1 \left[z - z^* - z^* \ln \left(\frac{z}{z^*} \right) \right].$$

Menggunakan Lemma 1, diperoleh

$$\begin{aligned} {}^{CF}D_t^\alpha V_1(x) &\leq \left(r - \sigma_1 - qE + \frac{\sigma_2}{2} \right) \left[\frac{(x - x^*)^2}{x} \right] - \frac{r}{K} \frac{(x - x^*)^2 (x + x^*)}{x} \\ &\quad - \frac{r}{K} (xy - x^*y^*) \left[\frac{x - x^*}{x} \right] + \frac{\sigma_2 (y - y^*)^2}{2x} \\ &\quad - m_1 \left(\frac{xz}{\beta + x} - \frac{x^*z^*}{\beta + x^*} \right) \left[\frac{x - x^*}{x} \right], \\ {}^{CF}D_t^\alpha V_2(y) &\leq \frac{\sigma_2 y^*}{\sigma_1 x^*} \left(s - \frac{\sigma_2}{2} \right) \left[\frac{(y - y^*)^2}{y} \right] - \frac{s}{K} \frac{(x - x^*)^2 (x + x^*)}{x} \frac{\sigma_2 y^*}{\sigma_1 x^*} \\ &\quad - \frac{s}{K} (xy - x^*y^*) \left[\frac{x - x^*}{x} \right] \frac{\sigma_2 y^*}{\sigma_1 x^*} + \frac{(x - x^*)^2}{2y} \frac{\sigma_2 y^*}{x^*} \\ &\quad - \frac{\sigma_2 y^*}{\sigma_1 x^*} m_1 \left(\frac{yz}{\beta + y} - \frac{y^*z^*}{\beta + y^*} \right) \left[\frac{y - y^*}{y} \right], \end{aligned}$$

dan

$${}^{CF}D_t^\alpha V_3(z) \leq - \frac{b(z - z^*)^2}{z} \frac{m_1(\beta + x^*)}{\beta m_2} + \frac{2m_1(\beta + x^*)}{\beta} \frac{(z - z^*)^2}{z}.$$

Dengan demikian diperoleh kestabilan global untuk titik ekuilibrium koeksistensi predator prey yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3. Titik kesetimbangan $T_2(x^*, y^*, z^*)$ stabil asimtotik global jika kondisi-kondisi berikut terpenuhi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_1} \left(r - \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2} \right) &\leq E, \quad s - \frac{\sigma_2}{2} \leq 0, \quad b \leq 2m_1, \quad \text{dan} \\ \frac{\sigma_2}{2} \left(\frac{(y - y^*)^2}{x} + \frac{y^*(x - x^*)^2}{yx^*} \right) &\leq m_1 \left(\left(\frac{yz}{\beta + y} - \frac{y^*z^*}{\beta + y^*} \right) \left[\frac{y - y^*}{y} \right] \right) \\ &\quad + \frac{\sigma_2 y^*}{\sigma_1 x^*} \left(\frac{xz}{\beta + x} - \frac{x^*z^*}{\beta + x^*} \right) \left[\frac{x - x^*}{x} \right]. \end{aligned}$$

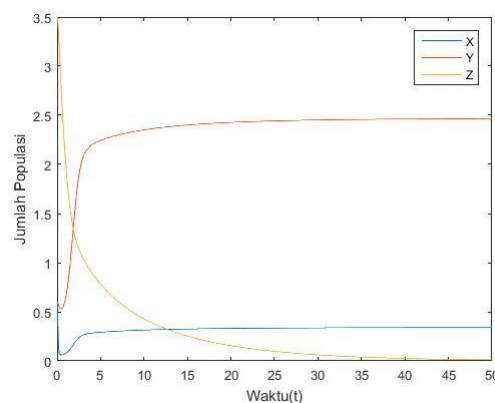
Kondisi kestabilan asimtotik global titik ekuilibrium T_2 menunjukkan bahwa bahwa eksploitasi tidak akan mengubah sistem. Dengan kata lain, apabila predator tidak dimusnahkan dalam model perikanan dengan eksploitasi yang berlebihan sistem akan dapat pulih.

3.2 Simulasi Numerik

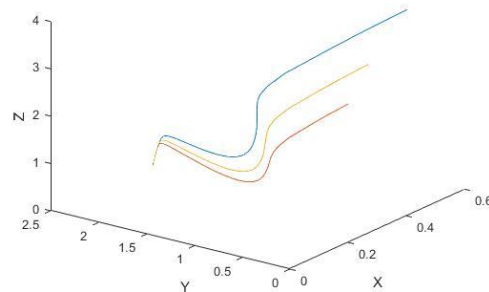
Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan metode Adams Bashforth order fraksional tiga langkah (Owolabi & Atangana, 2019). Untuk keperluan simulasi, pada kasus pertama digunakan nilai-nilai parameter

$$r = 2; s = 2,5; \sigma_1 = 0,4; \sigma_2 = 0,8; m_1 = 0,6; m_2 = 0,5; q = 4; E = 1,5; \\ b = 0,6; K = 4; \beta = 0,0702.$$

Dengan menggunakan nilai-nilai tersebut, kondisi (9), (10) dan (11) pada Teorema 1 terpenuhi. Gambar 1 menunjukkan kestabilan pada titik kesetimbangan T_1 dari Sistem (8). Berdasarkan Gambar 1 dapat disimpulkan bahwa populasi predator mengalami kepunahan. Hal ini dapat terjadi karena tingginya tingkat kematian predator sedangkan laju pertumbuhannya kecil. Tingginya tingkat kematian predator disebabkan oleh hal yang tak terduga, seperti wabah penyakit, hilangnya keanekaragaman hayati, dan spesies invasif. Sedangkan dengan tidak adanya predator menyebabkan populasi prey meningkat pesat karena tidak adanya pengurangan oleh predator. Spesies prey tidak mengalami kepunahan baik pada kawasan konservasi maupun kawasan non-konservasi, hal ini terjadi karena terjadi migrasi antara kedua wilayah dan keanekaragaman hayati pada kawasan konservasi dijaga keberadaanya.

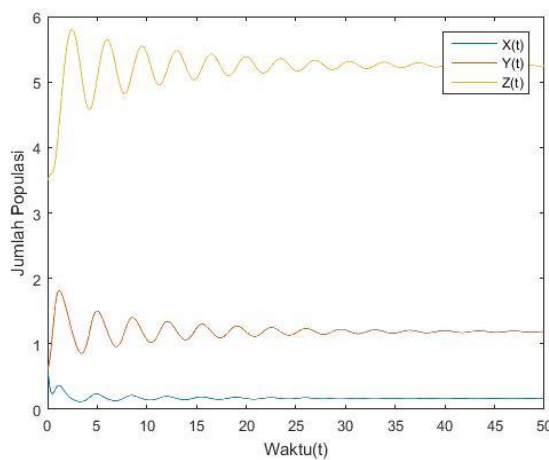


Gambar 1. Grafik perubahan populasi terhadap waktu pada T_1 .



Gambar 2. Potret fase yang menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan T_1 .

Dengan menggunakan nilai parameter yang sama dengan Gambar 4 diperoleh hasil potret fase pada Gambar 2. Potret fase tersebut menunjukkan bahwa dengan menggunakan nilai awal yang berbeda Sistem (8) akan selalu menuju titik kesetimbangan $T_1(0,3042, 2,468, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal dan memenuhi kondisi (9),(10), dan (11) sehingga Teorema 1 terpenuhi.



Gambar 3. Grafik dinamika populasi terhadap waktu pada T_2 .

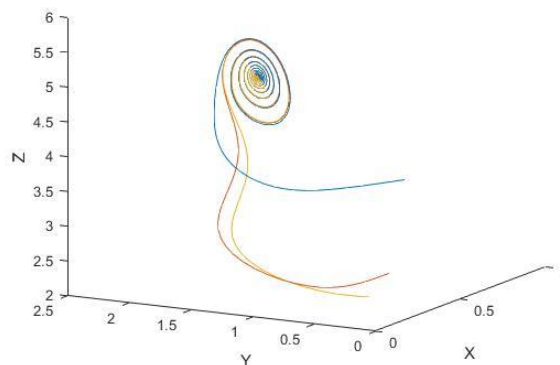
Pada Gambar 3 menunjukkan titik kesetimbangan T_2 dan titik kestabilan dari Sistem (8) dengan menggunakan parameter

$$r = 1; s = 5; \sigma_1 = 0,6; \sigma_2 = 0,8; m_1 = 0,93; m_2 = 0,9; q = 0,1; E = 0,8;$$

$$b = 0,74; K = 4; \beta = 0,7.$$

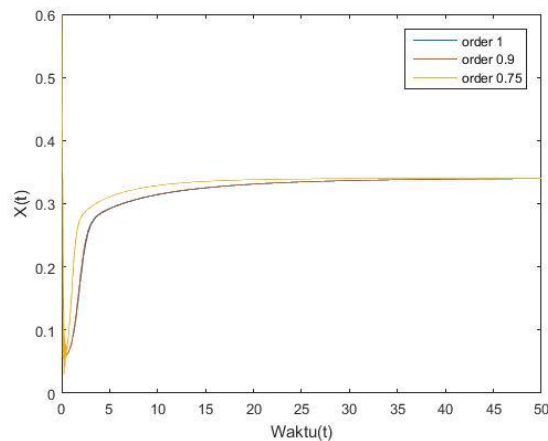
Berdasarkan Gambar 3 dapat disimpulkan bahwa setiap spesies tidak ada yang mengalami kepunahan. Hal ini dapat terjadi karena adanya keseimbangan ekologi sehingga semua spesies dapat eksis. Hal ini memungkinkan untuk

melakukan eksploitasi mangsa yang berlebihan pada kawasan non-konservasi dan populasi mangsa akan tetap eksis. Akan tetapi untuk mendapatkan keuntungan yang maksimal dan ekologi tetap lestari maka usaha pemanen harus berdasarkan prosedur dan aturan yang berlaku, yaitu dengan mempertimbangkan kelahiran populasi mangsa pemangsa dan waktu pelaksanaan panen.



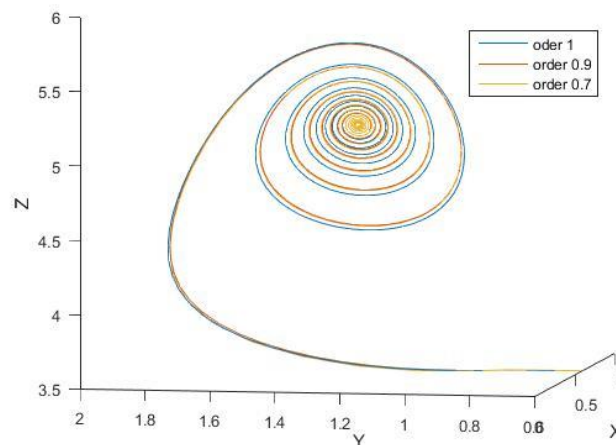
Gambar 4. Potret fase sistem titik kesetimbangan T_2 .

Dengan menggunakan nilai parameter yang sama dengan Gambar 3 diperoleh potret fase pada Gambar 4. Gambar 4 menunjukkan bahwa dengan mengambil nilai awal yang berbeda akan menuju titik kesetimbangan $T_2(0,17, 1,19,5,25)$ dan memenuhi kondisi $C_1 > 0$, $C_3 > 0$, dan $C_1 C_2 - C_3 > 0$ dimana $C_1 = 8,6859$, $C_2 = 20,8066$, $C_3 = 8,4229$ sehingga Teorema 4.3 terpenuhi. Jadi titik kesetimbangan T_2 stabil asimtotik lokal.



Gambar 5. Grafik populasi x dengan nilai α berbeda.

Gambar 5 merupakan hasil simulasi populasi mangsa pada kawasan tidak dilindungi dengan beberapa nilai α yaitu $\alpha = 0,75, \alpha = 0,9, \alpha = 1$ dan dengan menggunakan parameter $r = 2; s = 2,5; \sigma_1 = 0,4; \sigma_2 = 0,8; m_1 = 0,6; m_2 = 0,5; q = 4; E = 1,5; b = 0,6; K = 4$. Pada simulasi ini digunakan nilai awal yaitu $x_0 = 0,6, y_0 = 0,6$ dan $z_0 = 3,5$. Pada Gambar 8 terlihat bahwa semakin kecil nilai α menyebabkan grafik bergerak semakin cepat menuju titik kesetimbangan dan diperoleh titik kesetimbangan untuk populasi mangsa pada kawasan tidak dilindungi yaitu 0,3042.



Gambar 6. Potret fase pada titik kesetimbangan T_2 dengan order berbeda.

Gambar 6 merupakan hasil simulasi dengan beberapa nilai α yaitu $\alpha = 0,75, \alpha = 0,9, \alpha = 1$ dan dengan menggunakan parameter

$$r = 1; s = 5; \sigma_1 = 0,6; \sigma_2 = 0,8; m_1 = 0,93; m_2 = 0,9; q = 0,1; E = 0,8; \\ b = 0,74; K = 4; \beta = 0,7.$$

Pada simulasi ini digunakan nilai awal yaitu $x_0 = 0,6, y_0 = 0,6$ dan $z_0 = 3,5$. Sumber data diperoleh dari Mansal & Sene (2020). Pada hasil simulasi tersebut terlihat bahwa semakin kecil nilai α menyebabkan grafik bergerak semakin cepat menuju titik kesetimbangan. Berdasarkan pada Gambar 6 dapat disimpulkan bahwa semakin kecil nilai α menyebabkan grafik semakin cepat menuju titik kesetimbangan. Nilai α mempengaruhi kecepatan konvergensi menuju titik kesetimbangan akan tetapi tidak mempengaruhi kestabilan titik kesetimbangan.

4. KESIMPULAN

Dalam penelitian ini dibahas model fraksional untuk memahami dinamika predator-prey pada kawasan konservasi. Berdasarkan model tersebut diperoleh dua titik kesetimbangan nontrivial yaitu $T_1(x_1, y_1, 0)$ dan $T_2(x^*, y^*, z^*)$ stabil asimtotik. Kestabilan lokal titik kesetimbangan bermakna bahwa dengan keadaan awal yang berbeda-beda di sekitar kondisi setimbang, tidak akan mempengaruhi kondisi akhir yang menuju kondisi tersebut. Titik kesetimbangan T_1 menunjukkan tidak adanya predator dalam populasi, sedangkan kesetimbangan T_2 menunjukkan predator dan prey hidup bersama dalam populasi. Selanjutnya simulasi numerik menunjukkan bahwa order fraksional mempengaruhi waktu konvergensi menuju titik kesetimbangan akan tetapi tidak mempengaruhi kestabilan titik kesetimbangan. Untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan analisis model menggunakan teori kontrol optimal sehingga diperoleh kebijakan penangkapan mangsa yang optimal.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmed, E., El-Sayed, A. M. A., dan El-Saka, H. A. A., *Equilibrium Points, Stability and Numerical Solutions of Fractional-Order Predator-Prey and Rabies Models*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **325**(1) (2007), 542–553, <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.01.087>.
- Caputo, M. dan Fabrizio, M., *A new Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel*, Progress in Fractional Differentiation and Applications, **85**(2) (2015), 73–85.
- Choi, C.-H., *Generalizations of the Lotka-Volterra Population Ecology Model: Theory, Simulation, and Applications*, Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences, **1**(4) (1997), 263–273, <https://doi.org/10.1023/A:1021883828745>.
- Claudet, J., Osenberg, C. W., Benedetti-Cecchi, L., Domenici, P., García-Charton, J., Pérez-Ruzafa, Á., Badalamenti, F., Bayle-Sempere, J., Brito, A., dan Bulleri, F., *Marine Reserves: Size and Age Do Matter*, Ecology Letters, **11**(5) (2008), 481–489.

- Das, S. dan Gupta, P. K., *A Mathematical Model on Fractional Lotka–Volterra Equations*, *Journal of Theoretical Biology*, **277**(1) (2011), 1–6, <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2011.01.034>.
- Dubey, B., Chandra, P., dan Sinha, P., *A Resource Dependent Fishery Model with Optimal Harvesting Policy*, *Journal of Biological Systems*, **10**(01) (2002), 1–13.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., dan Trujillo, J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Vol. 204, 2006.
- Losada, J. dan Nieto, J. J., *Properties of A New Fractional Derivative without Singular Kernel*, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, **92**(2) (2015), 87–92.
- Mansal, F. dan Sene, N., *Analysis of Fractional Fishery Model with Reserve Area in The Context of Time-Fractional Order Derivative*, *Chaos, Solitons and Fractals: The Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena*, **140** (2020), 110200. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110200>.
- Mukherjee, D. dan Mondal, R., *Dynamical Analysis of A Fractional Order Prey-Predator System with A Reserved Area*, *Journal of Fractional Calculus and Applications*, **11**(1) (2020), 54–69.
- Owolabi, K. M., dan Atangana, A., *Numerical methods for fractional differentiation*, 2019.
- Petras, I., *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*, Springer Science & Business Media, 2011.
- Podlubny, I., *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Elsevier, 1999.
- Vargas-De-León, C., *Volterra-Type Lyapunov Functions for Fractional-Order Epidemic Systems*, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, **24** (2015), 75–85, <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.12.013>.

