Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP)
Vol. 14 No. 2, Desember 2022, hal. 215-226
ISSN (Cetak) : 2085-1456; ISSN (*Online*) : 2550-0422

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN STOKES PADA FLUIDA TERMAMPATKAN YANG DISERTAI TEGANGAN PERMUKAAN MENGGUNAKAN *PARTIAL FOURIER TRANSFORM*

Wardany Kusumasari

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman
Wardanykusumasuwardi@gmail.com

Sri Maryani*

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman
srimary_math_97@yahoo.com

Nunung Nurhayati

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman
nunung.nurhayati@unsoed.ac.id

ABSTRACT. *Fluid is a substance that flows because of the pressure. Based on their ability to resisting pressure, compressible fluid is one of the fluid which volume can be compressed so they have a constant density. The basic equation of fluid is Navier Stokes equation system that have a non linear partial differential form. Nevertheless, to obtain the solution of non linear partial differential problem is not easy. Therefore, Navier Stokes equation system are linearized into Stokes equation system. In this research, we investigate the solution of the Stokes equation system by partial Fourier transform for compressible fluid with surface tension in half-space.*

Keywords: *Stokes equation system, partial Fourier transform, compressible fluid, surface tension, half-space.*

ABSTRAK. Berdasarkan kemampuan menahan tekanan, fluida yang termampatkan merupakan salah satu fluida yang volumenya dapat dimampatkan sehingga massa jenisnya konstan. Persamaan dasar fluida adalah sistem persamaan Navier Stokes yang memiliki bentuk persamaan diferensial parsial tak linier. Untuk mendapatkan solusi masalah yang berbentuk tak linier tidaklah mudah. Oleh karena itu, sistem persamaan Navier Stokes dilinierisasi menjadi sistem persamaan Stokes. Pada penelitian ini akan dicari penyelesaian sistem persamaan Stokes menggunakan *partial Fourier transform* pada fluida termampatkan yang disertai tegangan permukaan di *half-space*.

Kata kunci: Sistem persamaan Stokes, *partial Fourier transform*, fluida yang termampatkan, tegangan permukaan, *half-spaces*.

---

*Penulis Korespondensi
Info Artikel : dikirim 12 Des. 2022; direvisi 24 Des. 2022; diterima 28 Des. 2022.

1. PENDAHULUAN

Mekanika fluida merupakan salah satu cabang ilmu fisika yang membahas sifat-sifat, hukum dan gaya yang berlaku pada fluida dan merupakan fondasi bagi ilmu terapan dan teknik. Tanpa disadari setiap hari manusia selalu berhubungan dengan fluida seperti udara, air dan zat alir lainnya baik yang diam maupun yang bergerak. Kemajuan pengetahuan mengenai fluida yang dicapai sampai abad ini meliputi berbagai jenis studi baik secara analitik, numerik, maupun eksperimen tentang aliran dan pengendalian lapisan batas, struktur turbulensi, pemindahan panas ke dan dari fluida yang mengalir serta banyak masalah dalam penerapannya. Untuk menyelesaikan permasalahan fluida diperlukan analisis matematika. Persamaan dasar fluida secara matematis adalah sistem persamaan Navier Stokes yang memiliki bentuk persamaan diferensial tak linier. Untuk mendapatkan solusi masalah yang berbentuk tak linier tidaklah mudah. Oleh karena itu, sistem persamaan Navier Stokes dilinierisasi menjadi sistem persamaan Stokes. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan Stokes adalah transformasi Fourier.

Terkait dengan topik tersebut, Shibata dan Shimizu (2012) telah membahas penyelesaian umum menggunakan transformasi Fourier parsial (*partial Fourier transform*) dari sistem persamaan Stokes di *half-space* untuk fluida yang tak termampatkan (*incompressible*) dengan menyertakan tegangan permukaan (*surface tension*). *Half-space* yang digunakan dalam penelitian tersebut yaitu ruang vektor berdimensi n dengan elemen ke-n dari vektornya adalah nonnegatif. Sementara itu, penelitian mengenai penyelesaian sistem persamaan Stokes untuk fluida yang termampatkan (*compressible*) tanpa tegangan permukaan pernah dibahas oleh Shibata dan Götz (2014). Pada penelitian ini, penulis tertarik untuk mengkaji penyelesaian sistem persamaan Stokes menggunakan *Partial Fourier Transform* pada fluida termampatkan yang disertai tegangan permukaan di *half-space.*

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Sistem Persamaan Stokes yang disertai Tegangan Permukaan

Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Shibata dan Shimizu (2012) serta Shibata dan Götz (2014) pada penelitian ini diperoleh sistem persamaan Stokes untuk fluida yang termampatkan dengan tegangan permukaan adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases} \lambda\rho + \gamma \operatorname{div} \boldsymbol{u} = f, & \text{di } \mathbb{R}_+{}^n \\ \lambda\boldsymbol{u} - \operatorname{Div} S(u,\rho) = \boldsymbol{g}, & \text{di } \mathbb{R}_+{}^n \\ \lambda\eta + u_n = d, & \text{di } \mathbb{R}_0{}^n \\ S(\boldsymbol{u},\rho)\boldsymbol{n} + \left(c_g - c_\sigma\Delta'\right)\eta\boldsymbol{n} = \boldsymbol{h}, & \text{di } \mathbb{R}_0{}^n \end{cases} \tag{1}$$

dengan

$$R_+{}^n = \left\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}n \;\; \middle| x_n > 0\right\},$$

$$R_0{}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\}.$$

dan

$$S(\boldsymbol{u},\rho) = 2\alpha\, \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) + (\beta \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \gamma\rho)I$$

dengan α, β, γ adalah konstanta yang memenuhi $\alpha, \gamma > 0$ dan $\alpha + \beta > 0$, dan

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) = \frac{(\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T)}{2}$$

yang komponen ke-(i,j) adalah $D_{ij} = \frac{(\partial_i v_j + \partial_j v_i)}{2}$ dengan $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, serta

$$\Delta' = \sum_{j=1}^{n} \partial_j{}^2, \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Misal $\lambda \neq 0$. Dari persamaan (1) baris pertama, dapat diperoleh

$$\rho = (f - \gamma \operatorname{div} \boldsymbol{u})\lambda^{-1}. \tag{2}$$

Kemudian, melalui substitusi persamaan (2) ke baris kedua sistem persamaan (1) dapat diperoleh

$$\lambda\boldsymbol{u} - \alpha\Delta\boldsymbol{u} - (\alpha + \beta + \delta)\nabla\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \tag{3}$$

dengan $\delta = \gamma^2\lambda^{-1}$ dan $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} - \gamma\lambda^{-1}\nabla f$.

Selanjutnya, melalui substitusi persamaan (2) dan $\boldsymbol{n} = (0, \ldots, 0, -1)$ ke baris keempat sistem persamaan (1) dapat diperoleh

$$2\alpha\, D(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} + (\beta + \delta)\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{u} \cdot I\boldsymbol{n} + \left(c_g - c_\sigma \Delta'\right)\eta\boldsymbol{n} = \boldsymbol{h}', \tag{4}$$

dengan $\boldsymbol{h}' = \boldsymbol{h} + \gamma f \lambda^{-1} I$ dan $\delta = \gamma^2 \lambda^{-1}$. Sehingga, untuk $= 1, \ldots, n-1$ persamaan (4) menjadi

$$\alpha\left(\partial_n u_j + \partial_j u_n\right) = -h'_j, \tag{5}$$

sedangkan untuk $j = n$ persamaan (4) menjadi

$$2\alpha \partial_n u_n + (\beta + \delta)\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{u} + \left(c_g - c_\sigma \Delta'\right)\eta = -h'_n, \tag{6}$$

dengan $-h'_n = -(h + \lambda^{-1}\gamma f)$.

Berdasarkan persamaan (3), (5), dan (6) maka sistem persamaan (1) dapat dituliskan kembali sebagai

$$\begin{cases} \lambda\boldsymbol{u} - \alpha\Delta\boldsymbol{u} - (\alpha + \beta + \delta\ )\ \nabla\mathrm{div}\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \\ \lambda\eta + u_n = d \\ \alpha\left(\partial_n u_j + \partial_j u_n\right) = -h'_j \\ 2\alpha\partial_n u_n + (\beta + \delta)\ div\ \boldsymbol{u} + \left(c_g - c_\sigma\Delta'\right)\eta\ = -h'_n. \end{cases} \tag{7}$$

Selanjutnya, berdasarkan Shibata dan Shimizu (2012) sistem persamaan (7) direduksi menjadi

$$\begin{cases} \lambda\boldsymbol{u} - \alpha\Delta\boldsymbol{u} - (\alpha + \beta + \delta\ )\ \nabla\mathrm{div}\ \boldsymbol{u} = 0 \\ \lambda\eta + u_n = \tilde{d} \\ \alpha\left(\partial_n u_j + \partial_j u_n\right) = -\widetilde{h_j} \\ 2\alpha\partial_n u_n + (\beta + \delta)\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{u} + \left(c_g - c_\sigma\Delta'\right)\eta\ = -\widetilde{h}_n \end{cases} \tag{8}$$

2.2 Penyelesaian Sistem Persamaan Stokes yang disertai Tegangan Permukaan Menggunakan *Partial Fourier Transform*

Setelah menyederhanakan sistem persamaan Stokes menjadi sistem persamaan (8), langkah selanjutnya adalah mentransformasi sistem persamaan (8) menggunakan *partial Fourier transform* sehingga diperoleh

$$\begin{cases} \alpha(\lambda\alpha^{-1} + |\omega'|^2)\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{j}} - \alpha{\partial_n}^2\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{j}} - (\alpha + \beta + \delta\ )i\omega_j(i\omega'\hat{u}' + \partial_n\hat{u}_n) = 0 \\ \alpha(\lambda\alpha^{-1} + |\omega'|^2)\hat{u}_n - \alpha{\partial_n}^2\hat{u}_n - (\alpha + \beta + \delta\ )\partial_n(i\omega'\hat{u}' + \partial_n\hat{u}_n) = 0 \\ \lambda\hat{\eta} + \hat{u}_n = \hat{d} \\ \alpha\left(\partial_n\hat{u}_j + i\omega_j\hat{u}_n\right) = -\hat{h}_j \\ 2\alpha\partial_n\hat{u}_n + (\beta + \delta)(i\omega'\hat{u}' + \partial_n\hat{u}_n) + \left(c_g + c_\sigma|\omega'|^2\right)\hat{\eta} = -\hat{h}_n, \end{cases} \tag{9}$$

dengan

$$i\omega'\hat{u}' = \sum_{k=1}^{n-1} i\omega_k \hat{u}_k. \tag{10}$$

Selanjutnya, berdasarkan Shibata dan Götz (2014) akan ditentukan akar-akar karakteristik sistem persamaan (8). Akar-akar karakteristik dapat diperoleh dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. menerapkan operasi divergensi pada sistem persamaan (8) baris pertama sehingga diperoleh

$$(\lambda - (2\alpha + \beta + \delta)\Delta)\mathrm{div}\, \boldsymbol{u} = 0; \tag{11}$$

2. menyederhanakan persamaan pertama dari sistem persamaan (2.8) sebagai berikut

$$\lambda\boldsymbol{u} - \alpha\Delta\boldsymbol{u} - (\alpha + \beta + \delta\,)\,\nabla\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0,$$
$$(\lambda - \alpha\Delta)\boldsymbol{u} - (\alpha + \beta + \delta\,)\,\nabla\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0; \tag{12}$$

   Selanjutnya, mengalikan kedua ruas persamaan (12) dengan $(\lambda - (2\alpha + \beta + \delta)\Delta)$, kemudian mensubstitusi persamaan (11) ke persamaan (12) diperoleh

$$(\Delta - \lambda\alpha^{-1})(\Delta - \lambda(2\alpha + \beta + \delta)^{-1})\boldsymbol{u} = 0; \tag{13}$$

3. mentransformasi persamaan (13) menggunakan *partial Fourier transform* sehingga diperoleh

$$\left(\partial_n{}^2 - B^2\right)\left(\partial_n{}^2 - A^2\right)\hat{\boldsymbol{u}} = 0,$$

   dengan

$$A = \sqrt{((2\alpha + \beta + \delta)^{-1}\lambda + |\omega'|^2)} \tag{14}$$

   dan

$$B = \sqrt{(\alpha^{-1}\lambda + |\omega'|^2)}. \tag{15}$$

Setelah memperoleh akar-akar karakteristik, dimisalkan solusi $\hat{\boldsymbol{u}} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)$ adalah

$$\begin{aligned}\hat{u}_l &= P_l(e^{-Bx_n} - e^{-Ax_n}) + Q_l e^{-Bx_n}\\ &= (P_l + Q_l)e^{-Bx_n} - P_l e^{-Ax_n}, l = 1, \dots, n\end{aligned} \tag{16}$$

Dari persamaan (16) diperoleh

$$\hat{u}_j = \left(P_j + Q_j\right)e^{-Bx_n} - P_j e^{-Ax_n}. \tag{17}$$

Turunan pertama dari persamaan (17) yaitu

$$\partial_n \hat{u}_j = -B\big(P_j + Q_j\big)e^{-Bx_n} + AP_j e^{-Ax_n}. \tag{18}$$

Turunan kedua dari persamaan (17) yaitu

$$\partial_n{}^2 \hat{u}_j = B^2\big(P_j + Q_j\big)e^{-Bx_n} - A^2 P_j e^{-Ax_n}. \tag{19}$$

Selanjutnya,

$$\hat{u}_n = (P_n + Q_n)e^{-Bx_n} - P_n e^{-Ax_n}. \tag{20}$$

Turunan pertama dari persamaan (20) yaitu

$$\partial_n \hat{u}_n = -B(P_n + Q_n)e^{-Bx_n} + AP_n e^{-Ax_n}. \tag{21}$$

Turunan kedua dari persamaan (20) yaitu

$$\partial_n{}^2 \hat{u}_n = B^2(P_n + Q_n)e^{-Bx_n} - A^2 P_n e^{-Ax_n}. \tag{22}$$

Selanjutnya, dengan substitusi persamaan (16) ke persamaan (10) diperoleh

$$i\omega'\hat{u}' = (i\omega'P' + i\omega'Q')e^{-Bx_n} - i\omega'P'e^{-Ax_n}. \tag{23}$$

Kemudian dilakukan substitusi persamaan (17)-(23) untuk persamaan pertama sampai kelima sesuai yang diperlukan pada setiap persamaan tersebut, sehingga diperoleh:

$$\begin{cases} \alpha(B^2 - A^2)P_j - (\alpha+\beta+\delta\,)i\omega_j(i\omega'P' - AP_n) = 0 \\ i\omega'P' + i\omega'Q' - BP_n - BQ_n = 0 \\ \alpha(B^2 - A^2)P_n + (\alpha+\beta+\delta\,)A(i\omega'P' - AP_n) = 0 \\ \lambda\hat{\eta} + Q_n = \hat{d} \\ \alpha\Big((B-A)P_j + BQ_j - i\omega_j Q_n\Big) = \hat{h}_j \\ (2\alpha+\beta+\delta)(B-A)P_n + (2\alpha+\beta+\delta)BQ_n - (\beta+\delta)i\omega'Q' = Z_\alpha \end{cases} \tag{24}$$

dengan $Z_\alpha = \big(c_g + c_\sigma|\omega'|^2\big)\hat{\eta}(\xi', 0)$.

Untuk mempermudah mendapatkan penyelesaian sistem persamaan (24), akan dibentuk sistem persamaan linier dengan memisalkan $i\omega'Q'$ dan Q_n sebagai dua variabel. Persamaan ketiga dari sistem persamaan (24) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\big(\alpha(B^2 - A^2) - (\alpha+\beta+\delta\,)A^2\big)P_n + (\alpha+\beta+\delta\,)Ai\omega'P' = 0. \tag{25}$$

Selanjutnya, dilakukan eliminasi persamaan kedua dari sistem persamaan (24) dan persamaan (25), sehingga diperoleh

$$i\omega' P' = \frac{\left((2\alpha+\beta+\delta)A^2 - \alpha B^2\right)\left(i\omega' Q' - BQ_n\right)}{\left((\alpha+\beta+\delta)AB + (\alpha B^2 - (2\alpha+\beta+\delta)A^2)\right)}. \quad (26)$$

Selanjutnya, mensubstitusikan persamaan (14) dan (15) ke persamaan (26) sehingga diperoleh

$$i\omega' P' = \frac{|\omega'|^2 \left(i\omega' Q' - BQ_n\right)}{(AB - |\omega'|^2)}. \quad (27)$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$P_n = \frac{A(i\omega' Q' - BQ_n)}{(AB - |\omega'|^2)}. \quad (28)$$

Kemudian, mengalikan $\sum_{j=1}^{n-1} i\omega_j$ ke persamaan kelima dari sistem persamaan (24) diperoleh

$$\alpha(B-A)i\omega' P' + \alpha B i\omega' Q' + \alpha|\omega'|^2 Q_n = i\omega' \hat{h}'. \quad (29)$$

Selanjutnya, dengan substitusi persamaan (27) ke persamaan (29) diperoleh

$$\frac{\alpha A\left(B^2 - |\omega'|^2\right) i\omega' Q'}{(AB - |\omega'|^2)} + \frac{\alpha|\omega'|^2\left(2AB - |\omega'|^2 - B^2\right)Q_n}{(AB - |\omega'|^2)} = i\omega' \hat{h}'. \quad (30)$$

Kemudian, mensubstitusikan persamaan (28) ke persamaan keenam dari sistem persamaan (24) diperoleh

$$\frac{\left(2\alpha A(B-A) - (\beta+\delta)\left(A^2 - |\omega'|^2\right)\right) i\omega' Q'}{(AB - |\omega'|^2)} + \frac{\left((2\alpha+\beta+\delta)B\left(A^2 - |\omega'|^2\right)\right)Q_n}{(AB - |\omega'|^2)} = Z_\alpha. \quad (31)$$

Dengan demikian, persamaan (30) dan (31) dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks,

$$L\begin{pmatrix} i\omega' Q' \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega' \hat{h}' \\ Z_\alpha \end{pmatrix} \quad (32)$$

dengan

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha A(B^2 - |\omega'|^2) & \alpha|\omega'|^2(2AB - |\omega'|^2 - B^2) \\ 2\alpha A(B-A) - (\beta+\delta)(A^2 - |\omega'|^2) & (2\alpha+\beta+\delta)B(A^2 - |\omega'|^2) \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan Shibata dan Götz (2014), Det $L \neq 0$ maka persamaan (32) menjadi

$$\begin{pmatrix} i\omega' Q' \\ Q_n \end{pmatrix} = L^{-1} \begin{pmatrix} i\omega' \hat{h}' \\ Z_\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Det} L} \begin{pmatrix} L_{22} & -L_{12} \\ -L_{21} & L_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\omega' \hat{h}' \\ Z_\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Det} L} \begin{pmatrix} L_{22} i\omega' \hat{h}' - L_{12} Z_\alpha \\ -L_{21} i\omega' \hat{h}' + L_{11} Z_\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{L_{22} i\omega' \hat{h}' - L_{12} Z_\alpha}{\operatorname{Det} L} \\ \dfrac{-L_{21} i\omega' \hat{h}' + L_{11} Z_\alpha}{\operatorname{Det} L} \end{pmatrix}, \tag{33}$$

dengan Det $L = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}$.

Oleh karena itu, dengan mensubstitusikan persamaan (33) ke persamaan (27) diperoleh

$$i\omega' P' = \frac{|\omega\prime|^2}{(AB - |\omega\prime|^2) \operatorname{Det} L} M \tag{34}$$

dengan $M = (L_{22} + BL_{21}) i\omega' \hat{h}' - (L_{12} + BL_{11}) Z_\alpha$. Dengan cara yang sama, mensubstitusikan persamaan (33) ke persamaan (28), sehingga diperoleh

$$P_n = \frac{A}{(AB - |\omega\prime|^2) \operatorname{Det} L} M. \tag{35}$$

Selanjutnya mensubstitusikan persamaan (27) dan persamaan (28) ke persamaan pertama dari sistem persamaan (24) sehingga diperoleh

$$P_j = \frac{(\alpha + \beta + \delta\ ) i\omega_j \left(|\omega'|^2 - A^2 \right)}{\alpha (B^2 - A^2)(AB - |\omega'|^2) \operatorname{Det} L} M. \tag{36}$$

Dengan cara yang sama, melalui substitusi persamaan (2.27) dan (2.28) ke persamaan ketiga dari sistem persamaan (24) diperoleh

$$P_n = -\frac{(\alpha + \beta + \delta\ ) A \left(|\omega'|^2 - A^2 \right)}{\alpha (B^2 - A^2)(AB - |\omega'|^2) \operatorname{Det} L} M. \tag{37}$$

Kemudian, mensubstitusikan baris kedua persamaan (33) dan (36) ke persamaan kelima dari sistem persamaan (24) sehingga diperoleh

$$Q_j = -\frac{i\omega_j}{B\mathrm{Det}\,L}\left(L_{21} + \frac{(\alpha+\beta+\delta)\left(|\omega'|^2 - A^2\right)(L_{22}+BL_{21})}{\alpha(B+A)(AB-|\omega'|^2)}\right) i\omega'\hat{h}' + \frac{i\omega_j}{B\mathrm{Det}\,L}\left(L_{11} + \frac{(\alpha+\beta+\delta)\left(|\omega'|^2 - A^2\right)(L_{12}+BL_{11})}{\alpha(B+A)(AB-|\omega'|^2)}\right) Z_\alpha. \quad (38)$$

Selanjutnya, melalui substitusi baris kedua persamaan (33) ke persamaan keempat dari (24) diperoleh

$$\hat{\eta} = \frac{\hat{d}\mathrm{Det}\,L + L_{21} i\omega'\hat{h}'}{\lambda\mathrm{Det}\,L + L_{11}Z_\alpha}. \quad (39)$$

Dengan demikian diperoleh penyelesaian sistem persamaan Stokes pada fluida termampatkan yang disertai tegangan permukaan dalam domain Fourier di *half-space* sebagai berikut:

$$\hat{u}_j = \left(\frac{(\alpha+\beta+\delta)i\omega_j\left(|\omega'|^2 - A^2\right)}{\alpha(B^2-A^2)(AB-|\omega'|^2)\mathrm{Det}\,L} M - \frac{i\omega_j}{B\mathrm{Det}\,L}\left(L_{21} + \frac{(\alpha+\beta+\delta)\left(|\omega'|^2 - A^2\right)(L_{22}+BL_{21})}{\alpha(B+A)(AB-|\omega'|^2)}\right) i\omega'\hat{h}' + \frac{i\omega_j}{B\mathrm{Det}\,L}\left(L_{11} + \frac{(\alpha+\beta+\delta)\left(|\omega'|^2 - A^2\right)(L_{12}+BL_{11})}{\alpha(B+A)(AB-|\omega'|^2)}\right) Z_\alpha\right) e^{-Bx_n} - \left(\frac{(\alpha+\beta+\delta)i\omega_j\left(|\omega'|^2 - A^2\right)}{\alpha(B^2-A^2)(AB-|\omega'|^2)\mathrm{Det}\,L} M\right) e^{-Ax_n},$$

$$\hat{u}_n = \left(\frac{A}{(AB-|\omega'|^2)\mathrm{Det}\,L} M + \frac{-L_{21}i\omega'\hat{h}' + L_{11}Z_\alpha}{\mathrm{Det}\,L}\right) e^{-Bx_n} - \left(\frac{A}{(AB-|\omega'|^2)\mathrm{Det}\,L} M\right) e^{-Ax_n},$$

dan

$$\hat{\eta} = \frac{\hat{d}\mathrm{Det}\,L + L_{21} i\omega'\hat{h}'}{\lambda\mathrm{Det}\,L + L_{11}Z_\alpha}.$$

Selanjutnya, penyelesaian sistem persamaan Stokes pada fluida termampatkan yang disertai tegangan permukaan dapat dituliskan menjadi

$u_j =$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(\alpha+\beta+\delta\,)i\omega_j\left(|\omega'|^2-A^2\right)}{\alpha(B^2-A^2)(AB-|\omega'|^2)\text{Det}\,L}M - \frac{i\omega_j}{B\text{Det}\,L}\left(L_{21}+\frac{(\alpha+\beta+\delta\,)\left(|\omega'|^2-A^2\right)(L_{22}+BL_{21})}{\alpha(B+A)(AB-|\omega'|^2)}\right)i\omega'\hat{h}' + \frac{i\omega_j}{B\text{Det}\,L}\left(L_{11}+\frac{(\alpha+\beta+\delta\,)\left(|\omega'|^2-A^2\right)(L_{12}+BL_{11})}{\alpha(B+A)(AB-|\omega'|^2)}\right)Z_\alpha\right)e^{-Bx_n} - \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(\alpha+\beta+\delta\,)i\omega_j\left(|\omega'|^2-A^2\right)}{\alpha(B^2-A^2)(AB-|\omega'|^2)\text{Det}\,L}M\right)e^{-Ax_n},$$

$u_n =$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\left(\frac{A}{(AB-|\omega'|^2)\text{Det}\,L}M+\frac{-L_{21}i\omega'\hat{h}'+L_{11}Z_\alpha}{\text{Det}\,L}\right)e^{-Bx_n}-\left(\frac{A}{(AB-|\omega'|^2)\text{Det}\,L}M\right)e^{-Ax_n}\right),$$

dan

$$\eta = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{d}\text{Det}\,L+L_{21}i\omega'\hat{h}'}{\lambda\text{Det}\,L+L_{11}Z_\alpha}\right).$$

3. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada penelitian ini, diperoleh penyelesaian sistem persamaan Stokes menggunakan *partial Fourier transform* pada kasus fluida termampatkan yang disertai tegangan permukaan sebagai berikut:

$u_j =$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(\alpha+\beta+\delta\,)i\omega_j\left(|\omega'|^2-A^2\right)}{\alpha(B^2-A^2)(AB-|\omega'|^2)\text{Det}\,L}M - \frac{i\omega_j}{B\text{Det}\,L}\left(L_{21}+\frac{(\alpha+\beta+\delta\,)\left(|\omega'|^2-A^2\right)(L_{22}+BL_{21})}{\alpha(B+A)(AB-|\omega'|^2)}\right)i\omega'\hat{h}' + \frac{i\omega_j}{B\text{Det}\,L}\left(L_{11}+\frac{(\alpha+\beta+\delta\,)\left(|\omega'|^2-A^2\right)(L_{12}+BL_{11})}{\alpha(B+A)(AB-|\omega'|^2)}\right)Z_\alpha\right)e^{-Bx_n} - \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(\alpha+\beta+\delta\,)i\omega_j\left(|\omega'|^2-A^2\right)}{\alpha(B^2-A^2)(AB-|\omega'|^2)\text{Det}\,L}M\right)e^{-Ax_n},$$

$u_{\mathrm{n}} =$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\left(\frac{A}{(AB-|\omega\prime|^2)\operatorname{Det} L}M + \frac{-L_{21}i\omega'\hat{h}'+L_{11}Z_\alpha}{\operatorname{Det} L}\right)e^{-Bx_n} - \left(\frac{A}{(AB-|\omega'|^2)\operatorname{Det} L}M\right)e^{-Ax_n}\right),$$

dan

$$\eta = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{d}\operatorname{Det} L + L_{21}i\omega'\hat{h}'}{\lambda\operatorname{Det} L + L_{11}Z_\alpha}\right).$$

Pada penelitian ini telah dikaji penyelesaian sistem persamaan Stokes menggunakan *partial Fourier transform* untuk fluida termampatkan. Pada penelitian selanjutnya disarankan untuk mengkaji penyelesaian sistem persamaan Stokes pada aliran fluida yang berbeda menggunakan *partial Fourier transform.*

DAFTAR PUSTAKA

Chorin, A. dan Marsden, J. E., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer, California, 1997.

Kobayashi, T. dan Shibata, Y., *Decay Estimates of Solutions for the Equations of Motion of Compressible Viscous and Heat-Conductive Gases in an Exterior Domain in* $\mathbb{R}^3$, Communications in Mathematical Physics, **200**(3) (1999), 621-659.

Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics*, 10th Ed., John Wiley and Sons, Columbus, 2011.

McDonough, J. M., *Lectures in Elementary Fluid Dynamics*, Department of Mechanical Engineering and Mathematics, University of Kentucky, Lexington, 2009.

Nakayama, Y., *Introduction to Fluid Mechanics*, Yokendo CO, LTD, Tokyo, 1999.

Olver, P.J., *Introduction to Partial Differential Equation*, Springer, USA, 2014.

Purcell, E. J., Varberg, D., Rigdon, S. E., *Kalkulus*, Edisi Kesembilan, Jilid 2, Terjemahan oleh I Nyoman Susila, Erlangga, Jakarta, 2011.

Ridwan, *Mekanika Fluida Dasar*, Universitas Gunadarma, Jakarta, 1999.

Rohtak, *Fluid Dynamics*, Maharshi Dayanand University, New Delhi, 2004.

Ross, L., *Differential Equations*, 3rd Ed., Rajiv Binding House, Delhi,2010.

Shibata, Y. dan Götz, D., *On The R-Boundedness of The Solution Operators in The Study of The Compressible Viscous Fluid with Free Boundary Conditions*, Asymptotic Analysis, **90**(3-4) (2014), 207-236.

Shibata, Y. dan Shimizu, S., *On The Maximal* $L_P - L_Q$ *Regularity of The Stokes Problem with First Order Boundary Condition Model Problems*, J. Math. Soc. Japan, **64**(2) (2012), 561-625.

Sirair, R., *Pengaruh Massa terhadap Kecepatan dan Percepatan Berdasarkan Hukum II Newton Menggunakan Linier Air Track*, Jurnal Ilmu Fisika dan Teknologi, **2**(2) (2018), 11-17.

Strichartz, R. S., *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transform*, CRC Press, USA, 1984.

Waluya, B., *Buku Ajar Persamaan Diferensial*, Universitas Negeri Semarang, Semarang, 2006.

Zill, D. G., *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications.* 10th Ed, Brooks/Cole, Cengage Learning, Canada, 2013.