

SOLUSI PERSAMAAN OSILATOR NONLINIER MENGGUNAKAN METODE HOMOTOPI PERTURBASI

Fitri Ferianti Marfungah

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jenderal Soedirman

Mashuri*

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jenderal Soedirman
mashuri@unsoed.ac.id

Bambang Hendriya Guswanto

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jenderal Soedirman

ABSTRACT. *The oscillator is an electronic circuit that is widely used in electronic devices. One of the mathematical models that describe the oscillator problem is the conservative nonlinear oscillator equation. In this study, the conservative nonlinear oscillator equation is discussed in the form of $x'' + x^\alpha = 0$ where $\alpha > 0$ and x^α are odd functions. The purpose of this study is to find a solution to the conservative nonlinear oscillator equation and to know the simulation of the obtained solution. The method used to find the solution to the equation is the homotopy perturbation method which is a combination of the homotopy and perturbation methods. The search for a solution to the conservative nonlinear oscillator equation using the homotopy perturbation method is also modified by the Lindstedt-Poincare method to deal with secular terms. The simulation results show that the greater the value of α , the smaller the angular frequency produced and the fewer waves formed.*

Keywords: *Conservative nonlinear oscillator equation, perturbation homotopy method, Lindstedt-Poincare method.*

ABSTRAK. Osilator adalah suatu rangkaian elektronika yang banyak dimanfaatkan dalam perangkat elektronik. Salah satu model matematika yang menggambarkan permasalahan osilator adalah persamaan osilator nonlinier konservatif. Pada penelitian ini dibahas persamaan osilator nonlinier konservatif $x'' + x^\alpha = 0$ dengan $\alpha > 0$ dan x^α merupakan fungsi ganjil. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mencari solusi dari persamaan osilator nonlinier konservatif dan mengetahui simulasi dari solusi yang diperoleh. Metode yang digunakan untuk mencari solusi persamaan tersebut adalah metode homotopi perturbasi yang merupakan penggabungan dari metode homotopi dan perturbasi. Pencarian solusi dari persamaan osilator nonlinier konservatif menggunakan metode homotopi perturbasi juga dimodifikasi dengan metode Lindstedt-Poincare untuk mengatasi *secular term*. Hasil simulasi menunjukkan bahwa semakin besar nilai α , maka semakin kecil frekuensi sudut yang dihasilkan dan semakin sedikit gelombang yang terbentuk.

Kata Kunci: Persamaan osilator nonlinier konservatif, metode homotopi perturbasi, metode Lindstedt-Poincare.

*Penulis Korespondensi

1. PENDAHULUAN

Osilator adalah suatu rangkaian elektronika yang menghasilkan sejumlah getaran atau sinyal listrik secara periodik dengan amplitudo yang konstan. Osilator banyak dimanfaatkan dalam perangkat elektronik, seperti pemancar televisi, pemancar radio, konsol permainan, jam, dan penyerenta untuk menghasilkan gelombang elektromagnet yang dapat ditumpangi berbagai informasi. Selain itu, osilator juga digunakan untuk mendeteksi dan menentukan jarak (*detection and ranging*) dengan gelombang mikro (radar) dan gelombang ultrasonik (sonar). Komputer, detektor logam, senjata, dan hampir semua alat-alat digital juga memanfaatkan osilator.

Persamaan osilator adalah persamaan diferensial orde dua yang ditambahkan dengan fungsi nonlinier $f(x)$ (Beléndez et al., 2010). Persamaan ini banyak digunakan dalam berbagai bidang, terutama dalam bidang fisika dan teknik. Akan tetapi, persamaan ini sulit diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, diperlukan cara lain untuk menyelesaikan persamaan osilator ini.

Sampai saat ini, metode analitik nonlinier untuk memecahkan masalah nonlinier didominasi oleh metode perturbasi (He, 2000). Metode perturbasi digunakan untuk menentukan solusi aproksimasi yang ditulis dalam bentuk ekspansi barisan dari suatu sistem yang mengalami gangguan (*perturbed system*). Gangguan tersebut muncul ketika suatu proses fisis terjadi jauh lebih lambat dari yang seharusnya. Dalam metode perturbasi, gangguan tersebut dicirikan dengan suatu parameter bernilai kecil yang disebut sebagai parameter perturbasi. Akan tetapi pada kenyataannya, tidak semua permasalahan nonlinier memiliki parameter kecil. Akibatnya, metode perturbasi tidak bisa digunakan secara langsung untuk menyelesaikan permasalahan nonlinier tersebut. Selain itu, penentuan parameter kecil pada metode perturbasi juga membutuhkan teknik khusus. Apabila penentuan parameter kecil tidak tepat, maka dapat menghasilkan galat yang besar. Oleh sebab itu, diperlukan metode baru untuk mengatasi keterbatasan metode perturbasi ini.

Pada tahun 1997, Liu mengusulkan metode perturbasi baru yang tidak didasarkan pada parameter kecil, tetapi pada parameter buatan yang disisipkan

dalam suatu persamaan. Dalam metode Liu, parameter buatan dianggap sebagai parameter kecil. Namun dalam kebanyakan kasus, metode ini akan gagal untuk mendapatkan pendekatan yang valid secara seragam. Akibatnya, parameter buatan tersebut tidak dapat dianggap sebagai parameter kecil (He, 2000). Untuk mengatasi masalah tersebut, He memperkenalkan metode perturbasi baru yang didasarkan pada metode homotopi dalam topologi. Dalam metode homotopi, persamaan akan disisipkan parameter homotopi yang biasanya berkisar dari nol hingga satu. Ketika parameter homotopi nol, maka persamaan akan menjadi persamaan linier. Sebaliknya, ketika parameter homotopi satu, maka persamaan akan sama dengan persamaan yang asli. Jadi, parameter homotopi $p \in [0,1]$ dapat dianggap sebagai parameter kecil. Metode yang menggabungkan metode homotopi dengan metode perturbasi ini selanjutnya disebut sebagai metode homotopi perturbasi (He, 2000).

Metode homotopi perturbasi ini telah diterapkan oleh beberapa peneliti untuk menyelesaikan permasalahan nonlinier. Salah satunya adalah metode homotopi perturbasi yang digunakan untuk memprediksi perambatan gelombang tsunami dengan parameter yang tajam dan tidak pasti. Penelitian yang dilakukan oleh Karunakar pada tahun 2020 ini menunjukkan bahwa metode homotopi perturbasi memberikan solusi aproksimasi untuk tinggi gelombang dan rata-rata kedalaman gelombang tsunami yang sesuai dengan solusi eksak pada nilai t dan x yang berbeda (Karunakar, 2020). Selain itu, pada tahun 2003 He menggunakan metode homotopi perturbasi untuk menyelesaikan persamaan *Duffing* orde tinggi. Hasil dari penelitian tersebut menunjukkan bahwa metode homotopi perturbasi memberikan solusi yang valid secara seragam untuk parameter yang sangat besar, walaupun solusi yang diambil hanya sampai orde pertama. Hal ini lebih akurat daripada solusi yang diambil menggunakan metode perturbasi sampai orde ke dua (He, 2003).

Metode homotopi perturbasi juga digunakan oleh Beléndez pada tahun 2009 untuk menyelesaikan persamaan osilator nonlinier konservatif dengan suku gaya pemulihnya sebanding dengan $x^{1/3}$. Persamaan osilator nonlinier konservatif merupakan persamaan osilator yang fungsi nonlinier $f(x)$ berupa fungsi ganjil

(Beléndez et al., 2010). Pada penelitiannya, Beléndez menggunakan fungsi nonlinier $f(x) = x^{1/3}$ karena pada kasus ini solusi eksak dapat diperoleh sehingga bisa dibandingkan dengan solusi homotopi perturbasi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa meskipun hanya sampai orde pertama, metode homotopi perturbasi dapat menghasilkan solusi yang memiliki akurasi tinggi dengan kesalahan relatif untuk perkiraan frekuensi kurang dari 0,60% pada nilai amplitudo osilasi kecil dan besar (Beléndez, 2009). Dalam penelitian ini, peneliti tertarik untuk mencari solusi persamaan osilator nonlinier konservatif yang suku gaya pemulihnya sebanding dengan x^α . Adapun nilai α yang digunakan adalah $\alpha > 0$ dan fungsi nonlinier x^α adalah fungsi ganjil. Dengan kondisi ini, $x = 0$ adalah posisi kesetimbangan (Beléndez et al., 2008). Selanjutnya, solusi persamaan osilator nonlinier konservatif tersebut disimulasikan secara numerik.

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka dengan tahapan sebagai berikut:

1. mengubah persamaan osilator nonlinier ke dalam bentuk persamaan homotopi;
2. mensubstitusikan deret perturbasi ke dalam persamaan homotopi dan menentukan orde perturbasi p ;
3. menentukan solusi pada masing-masing orde perturbasi p secara berurutan dari orde yang paling rendah ke orde yang lebih tinggi;
4. menentukan solusi dari persamaan osilator nonlinier dalam bentuk

$$x = \lim_{p \rightarrow 1} x = x_0 + x_1 + x_2 + \dots;$$

5. melakukan simulasi dari solusi persamaan osilator nonlinier menggunakan *software*Maple13.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Solusi Persamaan Osilator Nonlinier Konservatif

Bentuk umum persamaan osilator nonlinier konservatif dengan gaya pemulihnya sebanding dengan x^α untuk $\alpha > 0$ dan x^α merupakan fungsi ganjil adalah

$$x'' + x^\alpha = 0 \quad (1)$$

dengan syarat awal

$$x(0) = A > 0, \quad x'(0) = 0. \quad (2)$$

Karena persamaan (1) merupakan persamaan nonlinier, maka metode eksak sukar digunakan untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Selain itu, karena persamaan (1) tidak mengandung parameter yang bernilai kecil, maka metode perturbasi juga tidak dapat digunakan secara langsung untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1) adalah metode homotopi perturbasi.

Sebelumnya, ubah persamaan (1) ke dalam bentuk

$$x'' + 0x + x^\alpha = 0 \quad (3)$$

atau

$$x'' + x - x + x^\alpha = 0.$$

Dengan kata lain,

$$x'' + x = x - x^\alpha. \quad (4)$$

Setelah itu, transformasi persamaan (4) ke dalam persamaan homotopi

$$\mathcal{H}(x, p) = (1 - p)[x'' + x] + p[x'' + x - x + x^\alpha] = 0 \quad (5)$$

$$x'' + x - px'' - px + px'' + px - px + px^\alpha = 0$$

$$x'' + x - p(x - x^\alpha) = 0$$

sehingga diperoleh,

$$x'' + x = p(x - x^\alpha) \quad (6)$$

dengan $p \in [0, 1]$ adalah parameter homotopi. Ketika $p = 0$, persamaan (6) menjadi persamaan diferensial linier yang solusi eksaknya dapat dihitung. Sebaliknya, ketika $p = 1$, persamaan (6) menjadi persamaan asli (1). Dengan demikian, proses perubahan p dari nol menjadi satu adalah proses perubahan dari osilator linier ke osilator nonlinier asli.

Langkah selanjutnya adalah menggunakan metode perturbasi dengan parameter homotopi p sebagai parameter kecil (parameter perturbasi) untuk menyelesaikan persamaan (6). Dalam metode perturbasi ini, solusi x dan frekuensi sudut ω dalam deret pangkat dinyatakan sebagai

$$x = x_0 + px_1 + p^2x_2 + \dots \quad (7)$$

$$1 = \omega^2 - p\omega_1 - p^2\omega_2 - \dots \quad (8)$$

Substitusi persamaan (7) dan (8) ke dalam persamaan (6), kemudian dipisahkan berdasarkan orde perturbasi p , maka diperoleh persamaan berikut:

$$O(p^0): x_0'' + \omega^2x_0 = 0; \quad (9)$$

$$O(p^1): x_1'' + \omega^2x_1 - \omega_1x_0 = x_0 - x_0^\alpha; \quad (10)$$

$$O(p^2): x_2'' + \omega^2x_2 - \omega_1x_1 - \omega_2x_0 = x_1 - \alpha x_0^{\alpha-1}x_1. \quad (11)$$

Di samping itu, diketahui syarat awal $x(0) = A$ dan $x'(0) = 0$. Dengan kata lain, $x_0(0) + px_1(0) + p^2x_2(0) + \dots = A$ dan $x_0'(0) + px_1'(0) + p^2x_2'(0) + \dots = 0$. Dengan menyamakan koefisien di ruas kiri dan kanan pada masing-masing persamaan, maka diperoleh syarat awal pada masing-masing orde adalah

$$O(p^0): x_0(0) = A, \quad x_0'(0) = 0 \quad (12)$$

$$O(p^1): x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0 \quad (13)$$

$$O(p^2): x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = 0 \quad (14)$$

Solusi orde p^0 yaitu solusipersamaan (9) dan (12) adalah

$$x_0(t) = A \cos(\omega t) \quad (15)$$

Selanjutnya, substitusi persamaan (15) ke persamaan (10) sehingga diperoleh

$$x_1'' + \omega^2x_1 = (1 + \omega_1)A \cos(\omega t) - A^\alpha \cos^\alpha(\omega t). \quad (16)$$

Ekspansi suku $A^\alpha \cos^\alpha(\omega t)$ ke dalam deret Fourier sehingga persamaan (16) menjadi

$$x_1'' + \omega^2x_1 = [(1 + \omega_1)A - a_1] \cos(\omega t) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} \cos[(2n + 1)\omega t] \quad (17)$$

dengan

$$a_{2n+1} = 2^{1-\alpha} A^\alpha \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2n+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-2n+1}{2}\right)} \right]. \quad (18)$$

Berdasarkan metode Lindstedt-Poincare, suku yang menyebabkan *secular term* dihilangkan, maka diperoleh

$$\omega_1 = \frac{a_1}{A} - 1. \quad (19)$$

Akibatnya, persamaan (17) menjadi

$$x_1'' + \omega^2x_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} \cos[(2n + 1)\omega t]. \quad (20)$$

Solusi dari persamaan (20) adalah

$$x_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cos[(2n + 1)\omega t] \tag{21}$$

dengan

$$c_{2n+1} = \frac{a_{2n+1}}{4n(n+1)\omega^2} \text{ untuk } n \geq 1, \text{ dan} \tag{22}$$

$$c_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{4n(n+1)\omega^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1}.$$

Selanjutnya, persamaan (15) dan (21) disubstitusi ke persamaan (11) sehingga diperoleh persamaan orde dua

$$x_2'' + \omega^2 x_2 = \omega_2 A \cos(\omega t) + (1 + \omega_1) \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cos[(2n + 1)\omega t] - \alpha c_1 A^{\alpha-1} \cos^\alpha(\omega t) - \alpha A^{\alpha-1} \cos^{\alpha-1}(\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} \cos[(2n + 1)\omega t]. \tag{23}$$

Ekspansi suku $\alpha c_1 A^{\alpha-1} \cos^\alpha(\omega t)$ dan

$$\alpha A^{\alpha-1} \cos^{\alpha-1}(\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} \cos[(2n + 1)\omega t]$$

ke dalam deret Fourier sehingga diperoleh

$$x_2'' + \omega^2 x_2 = [\omega_2 A + (1 + \omega_1)c_1 - d_1 - e_1] \cos(\omega t) + (1 + \omega_1) \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} \cos[(2n + 1)\omega t] - \sum_{m=1}^{\infty} d_{2m+1} \cos[(2m + 1)\omega t] - \sum_{m=1}^{\infty} e_{2m+1} \cos[(2m + 1)\omega t] \tag{24}$$

dengan

$$d_{2n+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \alpha c_1 A^{\alpha-1} \cos^\alpha(\theta) \cos[(2m + 1)\theta] d\theta$$

dan

$$e_{2m+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \alpha A^{\alpha-1} \cos^{\alpha-1}(\theta) \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} \cos[(2n + 1)\theta] \cos[(2m + 1)\theta] d\theta. \tag{25}$$

Berdasarkan metode Lindstedt-Poincare suku yang menyebabkan *secular term* dihilangkan, maka diperoleh

$$\omega_2 = \frac{1}{A} [-(1 + \omega_1)c_1 + d_1 + e_1], \quad (26)$$

sehingga persamaan (24) menjadi

$$\begin{aligned} x_2'' + \omega^2 x_2 = & (1 + \omega_1) \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} \cos[(2n + 1)\omega t] \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} (d_{2m+1} + e_{2m+1}) \cos[(2m + 1)\omega t]. \end{aligned} \quad (27)$$

Solusi dari persamaan (27) adalah

$$x_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n+1} \cos[(2n + 1)\omega t] \quad (28)$$

dengan

$$f_{2n+1} = \frac{-(1 + \omega_1)c_{2n+1} + d_{2n+1} + e_{2n+1}}{4n(n + 1)\omega^2}, \text{ untuk } n \geq 1$$

dan

$$f_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(1 + \omega_1)c_{2n+1} + d_{2n+1} + e_{2n+1}}{4n(n + 1)\omega^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n+1}.$$

Jadi, solusi dari persamaan osilator nonlinier konservatif (1) dengan syarat awal (2) menggunakan metode homotopi perturbasi adalah

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1 + x_2 + \dots \\ x &= A \cos(\omega t) + \sum_{n=0}^{\infty} g_{2n+1} \cos[(2n + 1)\omega t] \end{aligned} \quad (30)$$

dengan

$$\begin{aligned} g_{2n+1} &= c_{2n+1} + f_{2n+1} \quad \text{untuk } n \geq 1 \text{ dan} \\ g_1 &= c_1 + f_1. \end{aligned} \quad (31)$$

Sementara itu, nilai ω ditentukan dengan mensubstitusikan persamaan (19) dan (26) ke persamaan (8) sehingga diperoleh

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{A} [a_1 - (1 + \omega_1)c_1 + d_1 + e_1]}. \quad (32)$$

3.2 Simulasi Persamaan Osilator

Solusi persamaan osilator nonlinier konservatif yang diperoleh menggunakan metode homotopi perturbasi dipengaruhi oleh gaya pemulih (x^α)

dan frekuensi sudut (ω). Hubungan antara nilai α dan ω dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1. Pengaruh variasi nilai α terhadap frekuensi sudut ω

$A = 1$	
α	ω
$\frac{1}{7}$	1,10487
$\frac{1}{5}$	1,09609
$\frac{1}{3}$	1,07685
1	1,00000
3	0,86603
5	0,79058
7	0,73951
9	0,70156

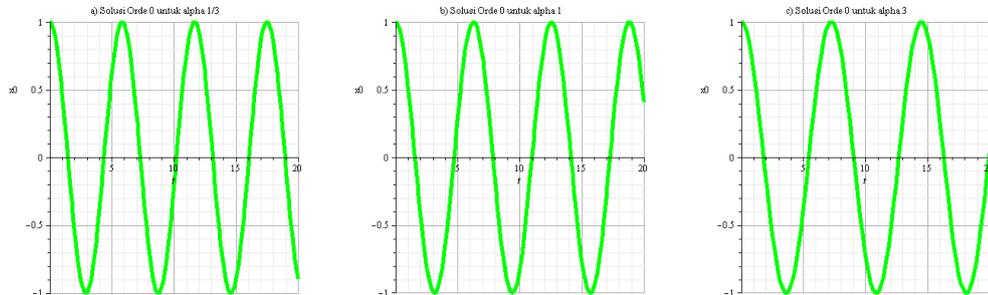
Tabel 1 menunjukkan perbandingan nilai α terhadap frekuensi sudut ω . Berdasarkan Tabel 1, untuk $\alpha = \frac{1}{7}$ menghasilkan $\omega = 1,10487$, sedangkan untuk $\alpha > \frac{1}{7}$ akan menghasilkan $\omega < 1,10487$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa ketika nilai α semakin besar, maka nilai ω yang dihasilkan akan semakin kecil.

Selanjutnya, akan dilakukan simulasi terhadap solusi pada masing-masing orde, yaitu pada persamaan (15), (21), (28), dan solusi totalnya (30) untuk $\alpha = \frac{1}{3}$, 1, dan 3.

3.2.1 Simulasi Solusi Orde 0

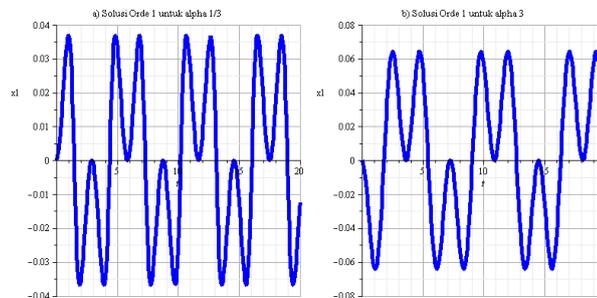
Solusi orde 0 pada Gambar 1 merupakan solusi dasar persamaan osilator dengan amplitudo 1. Berdasarkan Gambar 1, solusi orde 0 dari persamaan osilator (1) berbentuk gelombang yang merambat pada sumbu t dari 0 sampai 20. Ketika nilai $\alpha = \frac{1}{3}$ yang disajikan pada Gambar 1a), maka solusi orde 0 akan membentuk gelombang sebanyak 3,5 gelombang. Di lain pihak, ketika nilai $\alpha = 1$ yang disajikan pada Gambar 1b), maka solusi orde 0 akan membentuk gelombang sebanyak 3,15 gelombang. Sementara itu, ketika nilai $\alpha = 3$ yang disajikan pada Gambar 1c), maka solusi orde 0 akan membentuk gelombang sebanyak 2,75 gelombang. Dengan demikian, dari Gambar 1, terlihat jelas pengaruh nilai α

terhadap bentuk gelombang pada rentang t yang sama. Semakin besar nilai α yang diambil, maka gelombang yang terbentuk akan semakin sedikit.



Gambar 1. Solusi orde 0 untuk $A = 1$ pada $0 \leq t \leq 20$

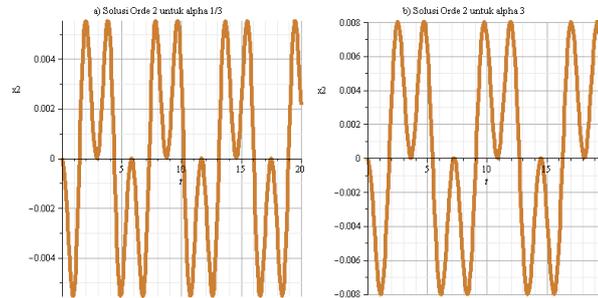
3.2.2 Simulasi Solusi Orde 1



Gambar 2. Solusi orde 1 untuk $A = 1$ pada $0 \leq t \leq 20$

Berdasarkan Gambar 2, solusi orde 1 dari persamaan osilator (1) berbentuk gelombang yang merambat pada sumbu t dari 0 sampai 20 dengan amplitudo 1. Ketika nilai $\alpha = \frac{1}{3}$ yang disajikan pada Gambar 2a), maka solusi orde 1 akan membentuk gelombang dengan puncak gelombang berada pada 0,037. Sementara itu, ketika nilai $\alpha = 3$, maka solusi orde 1 akan membentuk gelombang dengan puncak gelombang berada pada 0,064 yang disajikan pada Gambar 2b). Di lain pihak, ketika nilai $\alpha = 1$, solusi orde 1 tidak dapat ditentukan karena tidak ada nilai n yang memenuhi. Hal ini berarti ketika nilai $\alpha = 1$, solusi persamaan (1) sudah dapat ditentukan walaupun hanya sampai orde 0.

3.2.3 Simulasi Solusi Orde 2



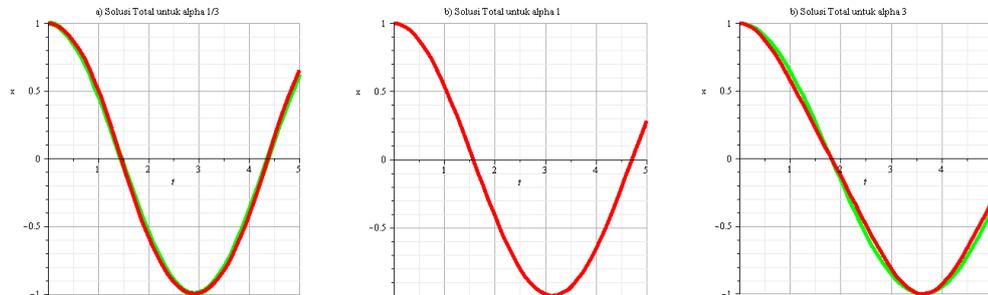
Gambar 3. Solusi orde 2 untuk $A = 1$ pada $0 \leq t \leq 20$

Berdasarkan Gambar 3, solusi orde 2 dari persamaan osilator (1) berbentuk gelombang yang merambat pada sumbu t dari 0 sampai 20 dengan amplitudo 1. Ketika nilai $\alpha = \frac{1}{3}$ yang disajikan pada Gambar 3a), maka solusi orde 2 akan membentuk gelombang dengan puncak gelombang berada pada 0,06. Sementara itu, ketika nilai $\alpha = 3$, maka solusi orde 2 akan membentuk gelombang dengan puncak gelombang berada pada 0,008 yang disajikan pada Gambar 3b).

3.2.4 Simulasi Solusi Total

Solusi total pada Gambar 4 merupakan solusi persamaan osilator (1) dengan amplitudo 1. Berdasarkan Gambar 4, solusi total dari persamaan osilator (1) berbentuk gelombang yang merambat pada sumbu t dari 0 sampai 5. Ketika nilai $\alpha = \frac{1}{3}$ yang disajikan pada Gambar 4a), maka solusi total akan mendekati solusi orde 0. Pada saat t tertentu, seperti $0 < t \leq 1,45$ solusi total lebih besar dari pada solusi orde 0. Sementara pada saat $1,45 < t \leq 4,3$ solusi total lebih kecil dari pada solusi orde 0. Di lain pihak, ketika nilai $\alpha = 1$ yang disajikan pada Gambar 4b), maka solusi total sama dengan solusi orde 0. Hal ini dikarenakan saat $\alpha = 1$, persamaan (1) menjadi persamaan linier, sehingga suku-suku nonlinier pada solusi homotopi perturbasi bernilai nol. Sementara itu, ketika nilai $\alpha = 3$ yang disajikan pada Gambar 4c), maka solusi total akan mendekati solusi orde 0. Pada saat t tertentu, seperti $0 < t \leq 1,8$ solusi total lebih kecil dari pada solusi orde 0. Sementara pada saat $1,8 < t \leq 5$ solusi total lebih besar dari pada

solusi orde 0. Dengan demikian, dari Gambar 4 terlihat jelas bahwa solusi total mendekati solusi orde 0.



Gambar 4. Solusi total untuk $A = 1$ pada $0 \leq t \leq 5$

dengan

— menyatakan solusi total;
— menyatakan solusi orde 0.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Persamaan osilator nonlinier konservatif dengan suku gaya pemulihnya sebanding dengan x^α yang dinyatakan dalam persamaan

$$x'' + x^\alpha = 0$$

memiliki solusi sampai orde dua menggunakan metode homotopi perturbasi sebagai berikut

$$x = A \cos(\omega t) + \sum_{n=0}^{\infty} g_{2n+1} \cos[(2n+1)\omega t]$$

dengan

$$g_{2n+1} = \frac{a_{2n+1} - (1 + \omega_1)c_{2n+1} + d_{2n+1} + e_{2n+1}}{4n(n+1)\omega^2}, \text{ untuk } n \geq 1,$$

$$g_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n+1} - (1 + \omega_1)c_{2n+1} + d_{2n+1} + e_{2n+1}}{4n(n+1)\omega^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n+1},$$

$$a_{2n+1} = 2^{1-\alpha} A^\alpha \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2n+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha-2n+1}{2}\right)} \right]$$

$$c_{2n+1} = \frac{a_{2n+1}}{4n(n+1)\omega^2}, \text{ untuk } n \geq 1,$$

$$c_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{4n(n+1)\omega^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1},$$

$$d_{2n+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \alpha c_1 A^{\alpha-1} \cos^{\alpha}(\theta) \cos[(2m+1)\theta] d\theta,$$

$$e_{2m+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \alpha A^{\alpha-1} \cos^{\alpha-1}(\theta) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} \cos[(2n+1)\theta] \cos[(2m+1)\theta] d\theta.$$

Adapun besarnya frekuensi sudut sampai orde dua dinyatakan dalam persamaan

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{A} [a_1 - (1 + \omega_1)c_1 + d_1 + e_1]}.$$

2. Berdasarkan hasil simulasi diperoleh kesimpulan bahwa semakin besar nilai α yang diambil, maka nilai ω yang dihasilkan akan semakin kecil dan gelombang yang terbentuk akan lebih sedikit.

DAFTAR PUSTAKA

- Beléndez, A., *Homotopy perturbation method for a conservative $x^{1/3}$ force nonlinear oscillator*, Computers and Mathematics with Applications, **58** (2009), 2267–2273.
- Beléndez, A., Alvarez, M. L., Mendez, D. I., Fernández, E., Yebra, M. S. S., & Beléndez, T., *Approximate Solutions for Conservative Nonlinear Oscillators by He's Homotopy Method*, Z. Naturforsch, **63**(9) (2008), 529–537.
- Beléndez, A., Gimeno, E., Alvarez, M. L., Yebra, M. S., & Mendez, D. I., *Analytical Approximate Solutions for Conservative Nonlinear Oscillators by Modified Rational Harmonic Balance Method*, International Journal of Computer Mathematics, **87** (2010), 1497–1511.
- He, J., *A Coupling Method of A Homotopy Technique and A Perturbation Technique for Non-Linear Problems*, International Journal of Non-Linear Mechanics, **35** (2000), 37–43.

He, J., *Homotopy Perturbation Method : A New Nonlinear Analytical Technique*, Applied Mathematics and Computation, **135** (2003), 73–79.

Karunakar, P., *Homotopy Perturbation Method for Predicting Tsunami Wave Propagation with Crisp and Uncertain Parameters*, International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, **31**(1) (2020), 92-105.