Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP)
Vol. 12 No. 2, Desember 2020, Hal. 49-62
ISSN (Cetak) : 2085-1456; ISSN (*Online*) : 2550-0422

KONSEP DASAR HIPERGRAF DAN SIFAT-SIFATNYA

Faiq Fauziya Putri
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetauan Alam
Universitas Jenderal Soedirman
faiqfauziyap@gmail.com

Triyani
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetauan Alam
Universitas Jenderal Soedirman

Ari Wardayani
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetauan Alam
Universitas Jenderal Soedirman

ABSTRACT. *This article discusses fundamental properties of hypergraphs. Hypergraphs are generalization of graph which hyperedges, edges in hypergraph, can join more than two vertices. The fundamental properties in this article are the vertices degrees, connection in hypergraphs, and dual hypergraph. connectivity in hypergraphs in this article are walks, trails, strict trails, path, and cycles. In the end of this article, we present a few examples of problems that can be represented by hypergraph.*

Keywords: *hypergraph, connectivity in hypergraph, dual hypergraph*

ABSTRAK. Artikel ini membahas mengenai konsep dasar hipergraf dan sifat-sifatnya. Hipergraf merupakan generalisasi dari graf dimana *hyperedge*, istilah sisi pada hipergraf, dapat menghubungkan lebih dari dua titik. Sifat-sifat dasar yang disajikan pada artikel ini berkaitan dengan derajat titik, keterhubungan dalam hipergraf, dan dual hipergraf pada hipergraf tak berarah. Keterhubungan dalam hipergraf berupa jalan, *trail*, *strict trail*, lintasan, dan *cycle*. Pada bagian akhir artikel, disajikan beberapa contoh permasalahan yang dapat direpresentasikan dengan hipergraf.

Kata kunci : hipergraf, keterhubungan dalam hipergraf, dual hipergraf

1. PENDAHULUAN

Graf merupakan suatu model matematika yang dapat merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antarobjek tersebut. Objek-objek diskrit digambarkan sebagai titik sedangkan hubungan antara dua objek direpresentasikan oleh sisi yang menghubungkan dua titik tersebut. Dalam permasalahan riil, tidak hanya dijumpai permasalahan mengenai hubungan antarobjek melainkan terdapat pula hubungan antara kelompok dengan kelompok lain dalam suatu komunitas yang lebih kompleks. Oleh karena itu muncul konsep hipergraf sebagai generalisasi dari graf. Pada graf, sebuah sisi hanya menghubungkan satu atau dua titik, sedangkan sisi pada hipergraf dapat menghubungkan lebih dari dua titik. Bahmanian dan Sajna (2015) mengkaji tentang konsep-konsep dasar konektivitas pada hipergraf dipandang dari konektivitas pada teori graf.

Representsi suatu masalah yang kompleks dengan hipergraf lebih sederhana dibanding graf. Elena dan Vladimir (2001) mengkaji hipergraf pada bidang kimia yaitu untuk memodelkan stuktur dari molekul. Meskipun hipergraf termasuk ilmu yang masih baru, hipergraf mendapat banyak perhatian karena kelebihannya tersebut. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji konsep-konsep dasar dan sifat-sifat hipergraf serta beberapa gambaran permasalahan riil yang dapat direpresentasikan melalui hipergraf.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Menurut Bahmanian dan Sajna (2015), hipergraf $H = (V, E)$ adalah pasangan himpunan (V, E) dimana himpunan $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ merupakan himpunan berhingga tak kosong dari titik, dan $E = \{E_i | i = 1,2, \ldots m\}$, $n, m \in \mathbb{Z}^+$, merupakan himpunan *hyperedge* dengan E_i merupakan himpunan bagian dari V. Himpunan titik dan himpunan *hyperedge j*uga dapat dituliskan sebagai $V(H)$ dan $E(H)$. Hipergraf dikatakan sederhana jika tidak ada *hyperedge* yang termuat dalam *hyperedge* lainnya, tidak memuat *loop*, dan banyaknya anggota dari irisan setiap dua *hyperdge* yang berbeda maksimal satu.

Berikut diberikan definisi derajat titik menurut Bahmanian dan Sajna (2015) dan definisi ketetanggaan titik menurut Bretto (2013).

Definisi 1 (Derajat Titik)
Derajat dari suatu titik $v \in V$ pada hipergraf $H = (V, E)$, dinotasikan $deg(v)$, adalah banyaknya hyperedge $E_i \in E$ sedemikian sehingga $v \in E_i$.

Definisi 2 (Ketetanggaan titik)

Dua titik berbeda $u, v \in V$ dikatakan bertetangga jika terdapat suatu *hyperedge* $E_i \in E$ sedemikian sehingga $u, v \in E_i$. Jika terdapat *hyperedge* $E_i = \{u\} \in E$, maka u dikatakan bertetangga dengan dirinya sendiri.

Selanjutnya akan diberikan definisi insiden pada hipergraf. Untuk mengetahui istilah insiden dalam hipergraf, terlebih dahulu dikenalkan dengan istilah *flag*. Berikut definisi *flag* dan insiden pada hipergraf menurut Bahmanian dan Sajna (2015).

Definisi 3 (*Flag*)

Flag dari hipergraf $H = (V, E)$ adalah setiap pasangan (v, E_i) dengan $v \in V$ dan $E_i \in E$ sedemikian sehingga $v \in E_i$. Himpunan dari semua flag di H dinotasikan $F(H)$.

Definisi 4 (Insiden)

Jika (v, E_i) adalah flag maka dapat dikatakan titik v insiden dengan hyperedge E_i.

Hipergraf dapat direpresentasikan melalui matriks ketetanggaan dan matriks insiden. Definisi mengenai matriks ketetanggaan dan matriks insiden menurut Bahmanian dan Sajna (2015) diberikan pada definisi berikut.

Definisi 5 (Matriks Ketetanggaan)

Misal $H = (V, E)$ adalah suatu hipergraf sederhana dengan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Matriks ketetanggaan dari H adalah matriks $A = (a_{rs})$ berukuran $n \times n$ dengan entri

$$a_{rs} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_r, v_s \text{ bertetangga} \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Definisi 6 (Matriks Insiden)

Misal $H = (V, E)$ *adalah sebuah hipergraf dengan* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *dan* $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$, $m \neq 0$. *Matriks insiden dari* H *adalah matriks* $M = (b_{pq})$ *berukuran* $n \times m$ *dengan*

$$b_{pq} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_p \in E_q \\ 0, & \text{untuk yang lain} \end{cases}.$$

2.1. Sifat-sifat Pada Hipergraf

Pada hipergraf terdapat *lemma* yang analog dengan *lemma* jabat tangan pada graf. *Lemma* ini berhubungan dengan jumlah semua derajat titik, banyaknya *flag* dan jumlah semua bilangan kardinal *hyperedge* pada suatu hipergraf.

Lema 1

Misal $H = (V, E)$ *adalah suatu hipergraf dengan* $F(H)$ *merupakan himpunan semua flag di H, maka*

$$\sum_{v \in V} deg(v) = |F(H)| = \sum_{E_i \in E} |E_i|$$

Bukti :

Derajat sebuah titik pada hipergraf didefinisikan sebagai banyaknya *hyperedge* yang memuat titik tersebut. Dengan kata lain, derajat sebuah titik adalah banyaknya *hyperedge* yang insiden dengan titik tersebut. Sebuah titik dan *hyperedge* dikatakan insiden jika pasangan tersebut merupakan *flag*. Saat semua derajat titik pada suatu hipergraf dijumlahkan artinya sama dengan menghitung banyaknya *flag* pada sebuah hipergraf. Selain itu, ketika semua derajat titik pada suatu hipergraf dijumlahkan, setiap *hyperedge* akan dihitung sebanyak titik yang dimuatnya. Oleh karena itu, jumlah semua derajat titik pada suatu hipergraf akan sama dengan jumlah semua bilangan kardinal dari *hyperedge* pada hipergraf tersebut. ■

Dari Lema 1 diperoleh Akibat 2 berikut.

Akibat 2

Banyaknya titik berderajat ganjil pada sebuah hipergraf genap jika dan hanya jika banyaknya hyperedge yang bilangan kardinalnya ganjil pada hipergraf tersebut berjumlah genap.

Sifat selanjutnya yang akan dibahas berkaitan dengan konektivitas dalam hipergraf. Istilah konektivitas dalam hipergraf berupa jalan, *trail*, *strict trail*, lintasan, dan *cycle* (Bahmanian dan Sajna (2015)).

Definisi 7 (Jalan)

Misal $H = (V, E)$ *merupakan suatu hipergraf dengan* $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ *dan* $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$. *Misal* $u, v \in V$ *merupakan dua titik yang berbeda pada* H. *Untuk bilangan bulat* $k \geq 0$, *jalan dengan panjang* k *dari titik* u *ke titik* v *adalah rangkaian titik dan hyperedge* $v_1, E_1, v_2, E_2, \dots, v_k, E_k, v_{k+1}$ *yang boleh berulang dengan* $v_1 = u, v_{k+1} = v$ *sedemikian sehingga* v_i *dan* v_{i+1} *bertetangga melalui hyperedge* E_i *untuk* $i = 1, 2, \cdots, k$. *Jika* $v_1 = v_{k+1}$ *maka jalan dikatakan tertutup. Selanjutnya, titik-titik* $v_1, v_2 \dots, v_{k+1}$ *jalan tersebut disebut anchor*.

Teorema 3

Misal H *merupakan sebuah hipergraf sederhana. Misal* v_i *dan* v_j *merupakan titik pada* H *dan matriks* $A = (a_{ij})$ *merupakan matriks ketetanggaan dari* H. *Entri* a_{ij} *pada matriks* A^k *menunjukkan banyaknya jalan dengan panjang* k *dari titik* v_i *ke* v_j *untuk* $k \in \mathbb{Z}^+$.

Bukti :

Pembuktian Teorema 3 menggunakan induksi matematika. Misal order dari hipergraf sederhana H adalah x.

i. Untuk $k = 1$, diperoleh $A^1 = A$. *Entri* a_{ij} pada matriks ketetanggaan A adalah

$$a_{ij} = (A)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_i, v_j \text{ bertetangga} \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Entri $a_{ij} = 1$ menunjukkan titik v_i bertetangga dengan v_j. Dengan kata lain, terdapat sebuah *hyperedge* yang menghubungkan v_i dan v_j secara langsung. Artinya, terdapat sebuah jalan dengan panjang satu dari v_i ke v_j. Entri $a_{ij} = 0$ menunjukkan titik v_i tidak bertetangga dengan v_j atau tidak ada *hyperedge* yang menghubungkan secara langsung antara v_i dan v_j. Hal ini berarti tidak terdapat jalan dengan panjang satu dari v_i ke v_j. Dengan demikian, entri a_{ij} pada matriks ketetanggaan A menyatakan banyaknya jalan dengan panjang satu dari titik v_i ke v_j.

ii. Misal, untuk $k = n$, entri $(A^n)_{ij}$ menyatakan banyaknya jalan dengan panjang n dari v_i ke v_j. Akan ditunjukkan bahwa entri $(A^{n+1})_{ij}$ menyatakan banyaknya jalan dengan panjang $n+1$ dari v_i ke v_j. Banyaknya jalan dari v_i ke v_j dengan panjang $n+1$ sama dengan banyaknya jalan dari v_i ke v_l dengan panjang n dimana v_l adalah titik yang bertetangga dengan v_j. Artinya, banyaknya jalan berbeda dari v_i ke v_j dengan panjang $n+1$ adalah

$$\sum_{v_l, v_j \epsilon E_i | E_i \epsilon E(H)} (A^n)_{ij}$$

Entri $(A)_{lj}$ bernilai 1 jika v_l bertetangga dengan v_j dan bernilai 0 jika v_l tidak bertetangga dengan v_j. Akibatnya, diperoleh

$$\sum_{l=1}^{x} (A^n)_{il}(A)_{lj} = (A^n)_{i1}(A)_{1j} + (A^n)_{i2}(A)_{2j} + \cdots + (A^n)_{ix}(A)_{xj} = (A^n A)_{ij}$$
$$= (A^{n+1})_{ij}$$

Dapat disimpulkan, entri a_{ij} pada matriks A^{n+1} menunjukkan banyaknya jalan dengan panjang $n+1$ dari v_i ke v_j. ■

Berikut diberikan definisi *trail*, *strict trail*, lintasan, dan *cycle*.

Definisi 8 (*Trail, Strict Trail,* Lintasan, dan *Cycle)*

Misal $W = v_1, E_1, v_2, E_2, \ldots, v_k, E_k, v_{k+1}$ *adalah jalan.*

1. *Jika anchor flag* $(v_1, E_1), (v_2, E_1), (v_2, E_2), \ldots, (v_k, E_k), (v_{k+1}, E_k)$ *semuanya berbeda, maka W disebut trail. Jika* $v_1 = v_{k+1}$ *maka trail dikatakan tertutup*
2. *Jika hyperedges* $E_1, E_2, \ldots, E_k$ *semuanya berbeda, maka W disebut strict trail. Jika* $v_1 = v_{k+1}$ *maka strict trail dikatakan tertutup.*
3. *Jika titik* $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ *dan hyperedges* $E_1, E_2, \ldots, E_k$ *semuanya berbeda, maka W disebut lintasan. Lintasan dengan* $v_1 = v_{k+1}$ *disebut cycle.*

Teorema 4

Diberikan sebuah hipergraf $H = (V, E)$ *dengan* $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *dan* $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$. *Misal* $W = v_1, E_1, v_2, E_2, \ldots, v_k, E_k, v_{k+1}$ *merupakan sebuah jalan pada hipergraf* H. *Jika* W *merupakan sebuah trail, maka tidak ada dua titik dan dua hyperedge berurutan pada* W *yang sama (termasuk hyperedge pertama dan terakhir pada trail tertutup).*

Bukti :

Misal sebuah jalan $W = v_1, E_1, v_2, E_2, \ldots, v_k, E_k, v_{k+1}$ merupakan *trail*. Artinya *anchor flag* $(v_1, E_1), (v_2, E_1), (v_2, E_2), \ldots, (v_k, E_k), (v_{k+1}, E_k)$ semuanya berbeda. Dari semua *anchor flag* tersebut dapat dilihat bahwa untuk $i = 1, 2, \ldots, k$, titik $v_i \neq v_{i+1}$. Dengan kata lain, dua titik berurutan pada W pasti tidak sama. Terbukti bahwa pada *trail* tidak terdapat dua titik berurutan yang sama.

Analog dengan penjelasan sebelumnya, karena W merupakan *trail* maka *anchor flag* $(v_1, E_1), (v_2, E_1), (v_2, E_2), \ldots, (v_k, E_k), (v_{k+1}, E_k)$ semuanya berbeda. Dengan kata lain, untuk $i = 1, 2, \ldots, k$, *hyperedge* $E_i \neq E_{i+1}$ atau dapat dikatakan bahwa tidak terdapat dua *hyperedge* berurutan yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan *hyperedge* pertama dan terakhir pada *trail* tertutup tidak sama. Misal, $W = v_1, E_1, v_2, E_2, \ldots, v_k, E_k, v_{k+1}$ dengan $v_1 = v_{k+1}$ merupakan trail tertutup. Artinya *anchor flag* $(v_1, E_1), (v_2, E_1), (v_2, E_2), \ldots, (v_k, E_k), (v_{k+1}, E_k)$ semuanya berbeda. Diketahui bahwa $v_1 = v_{k+1}$ dan (v_1, E_1) berbeda dengan (v_{k+1}, E_k). Artinya, *hyperedge* $E_1 \neq E_{k+1}$. Dengan kata lain, *hyperedge* pertama dan terakhir pada *trail* tertutup berbeda.

Terbukti bahwa pada *trail* tidak terdapat dua titik dan dua hyperedge berurutan yang sama serta pada *trail* tertutup, *hyperedge* pertama dan terakhirnya berbeda. ■

Teorema 5

Misal $H = (V, E)$ merupakan sebuah hipergraf yang tidak memuat loop dengan $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ dan $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$. Misal $W = v_1, E_1, v_2, E_2, \ldots, v_k, E_k, v_{k+1}$ merupakan sebuah jalan pada hipergraf H. Jika W merupakan strict trail, maka W juga merupakan trail. Begitupun jika W merupakan strict trail tertutup, maka W juga merupakan trail tertutup.

Bukti :

Misal $W = v_1, E_1, v_2, E_2, \ldots, v_k, E_k, v_{k+1}$ merupakan sebuah jalan pada hipergraf H yang tidak memuat *loop*. Misal W merupakan *strict trail*, artinya *hyperdge* pada W semuanya berbeda dan tidak terdapat dua titik berurutan yang sama karena H tidak memuat *loop*. Dari dua hal tersebut diperoleh *anchor flag* pada jalan W, $(v_1, E_1), (v_2, E_1), (v_2, E_2), \ldots, (v_k, E_k), (v_{k+1}, E_k)$, semuanya berbeda. Oleh karena itu, *strict trail* W juga merupakan *trail*. Terbukti bahwa, jika W merupakan *strict trail,* maka W juga merupakan *trail*.

Selanjutnya, misal $W = v_1, E_1, v_2, E_2, \ldots, v_k, E_k, v_{k+1}$ merupakan *strict trail* tertutup, artinya $v_1 = v_{k+1}$. *Hyperdge* pada *strict trail* tertutup W semuanya berbeda. Selain itu, tidak terdapat dua titik berurutan yang sama karena H tidak memuat *loop*. Diperoleh *anchor flag* $\left(v_1, E_1\right), (v_2, E_1), (v_2, E_2), \ldots, (v_k, E_k), (v_{k+1}, E_k)$ semuanya berbeda. Terbukti bahwa jika W merupakan *strict trail* tertutup, maka W juga merupakan *trail* tertutup. ■

Teorema 6

Diberikan sebuah hipergraf $H = (V, E)$ dengan $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ dan $E = \left\{E_1, E_2, \ldots, E_m\right\}$. Misal $W = v_1, E_1, v_2, E_2, \ldots, v_k, E_k, v_{k+1}$ merupakan sebuah jalan pada hipergraf H. Jika W merupakan lintasan, maka W merupakan strict trail dan trail. Sama halnya jika jika W merupakan cycle, maka W merupakan strict trail tertutup dan trail tertutup.

Bukti :

Misal sebuah jalan $W = v_1, E_1, v_2, E_2, \ldots, v_k, E_k, v_{k+1}$ merupakan lintasan, yang berarti $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ dan $E_1, E_2, \ldots, E_k$ semuanya berbeda. Lintasan W merupakan *strict trail* karena *hyperdge* pada W semuanya berbeda. Selanjutnya, karena semua titik $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ dan semua *hyperedge* $E_1, E_2, \ldots, E_k$ semuanya berbeda, maka *anchor flag* $\left(v_1, E_1\right), (v_2, E_1), (v_2, E_2), \ldots, (v_k, E_k), (v_{k+1}, E_k)$ juga semuanya berbeda. Dengan kata lain, lintasan W juga merupakan *trail*. Terbukti bahwa jika W merupakan sebuah lintasan, maka W merupakan *strict trail* dan *trail*.

Analog dengan pembuktian sebuah lintasan merupakan *strict trail* dan *trail*, diperoleh bahwa setiap *cycle* merupakan *strict trail* tertutup dan *trail* tertutup. ■

Selanjutnya, sifat yang akan dibahas adalah sifat pada hipergraf yang berkaitan dengan dual hipegraf. Istilah dual hipergraf berbeda dengan istilah dual graf. Berikut diberikan definisi dual hipergraf menurut Bahmanian dan Sajna (2015)

Definisi 9 (Dual Hipergraf)

Misal $H = (V, E)$ merupakan suatu hipergraf tak kosong dengan himpunan $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ dan $E = \{E_i | i = 1,2, \dots m\}$, $m \in \mathbb{Z}^+$. Dual hipergraf dari H adalah $H^T = (V^T, E^T)$ dengan $V^T = \{E_i \in E\}$ dan $E^T = \{v_j{}^T : v_j \in V\}$ dimana $v_j{}^T = \{E_i \in E : v_j \in E_i\}$, $j = 1,2, \dots, n$, untuk setiap $v_j \in V$.

Teorema 7

Misal $H = (V, E)$ adalah suatu hipergraf tak kosong dengan $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ dan $E = \{E_i | i = 1,2, \dots m\}$, $m \in \mathbb{Z}^+$. Dual hipergraf dari H adalah $H^T = (V^T, E^T)$ dengan $V^T = \{E_i \in E\}$ dan $E^T = \{v_j{}^T : v_j \in V\}$ dimana $v_j{}^T = \{E_i \in E : v_j \in E_i\}$. Untuk suatu $v_j \in V$ dan $v_j{}^T \in E^T$, berlaku $deg(v_j) = |v_j{}^T|$.

Bukti :

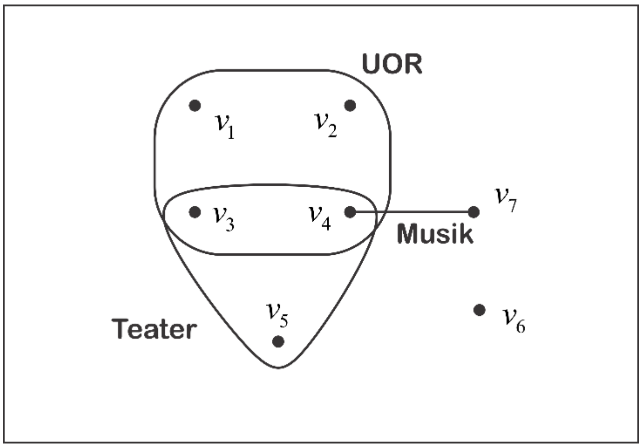
Misal $v_j \in V$, yang artinya terdapat $v_j{}^T \in E^T$ dengan $v_j{}^T = \{E_i \in E : v_j \in E_i\}$. Derajat titik $v_j \in V$ adalah banyaknya *hyperedge* $E_i \in E$ sedemikian sehingga $v_j \in E_i$. *Hyperedge* $v_j{}^T \in E^T$ merupakan himpunan *hyperedge* $E_i \in E$ sedemikian sehingga $v_j \in E_i$. Dengan kata lain, $|v_j{}^T|$ menyatakan banyaknya *hyperedge* $E_i \in E$ sedemikian sehingga $v_j \in E_i$. Oleh karena itu, diperoleh bahwa derajat titik $v_j \in V$ sama dengan bilangan kardinal dari *hyperedge* $v_j{}^T \in E^T$. Terbukti bahwa $deg(v_j) = |v_j{}^T|$. ■

2.2. Representasi Hipergraf dalam Masalah Riil

Graf digunakan di beberapa bidang untuk memodelkan suatu permasalahan. Hipergraf juga dapat merepresentasikan permasalahan di berbagai bidang. Berikut disajikan beberapa contoh representasi hipergraf dalam masalah riil.

Hipergraf dapat digunakan untuk merepresentasikan interaksi sosial. Individu atau kelompok digambarkan dengan titik sedangkan hubungannya digambarkan dengan *hyperedge*. Misalnya, titik menggambarkan mahasiswa Fakultas MIPA angkatan 2016 Universitas Jenderal Soedirman dan *hyperegde* menyatakan himpunan bagian dari mahasiswa MIPA angkatan 2016 yang mengikuti organisasi yang sama. Satu himpunan bagian untuk satu organisasi.

Berikut akan diberikan contoh representasi hipergraf dalam merepresentasikan mahasiswa yang mengikuti Unit Kegiatan Mahasiswa (UKM) yang sama. Misal, terdapat 7 orang mahasiswa yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$. Akan dilihat hubungan 7 mahasiswa tersebut berdasarkan keanggotaan dalam UKM seni dan olahraga. Misal, terdapat tiga UKM seni dan olahraga yaitu UKM Olahraga (UOR), UKM Teater, dan UKM Musik. Keanggotaan tersebut dapat dilihat dari hipergraf berikut.

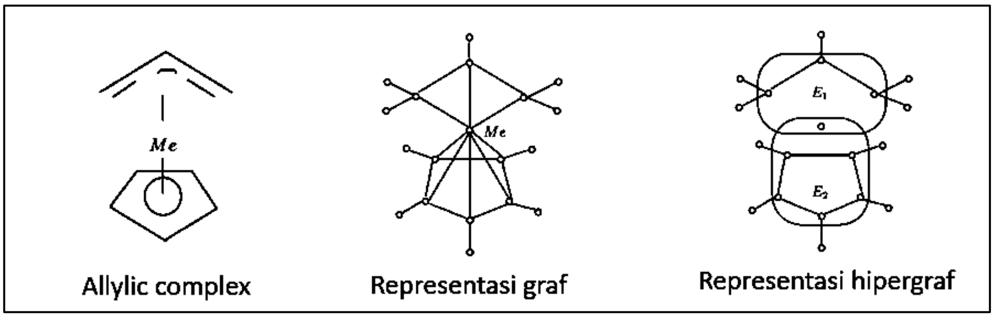


Gambar 1. Contoh representasi hipergraf

Misal, hipergraf pada Gambar 1 merupakan hipergraf $H_5 = (V, E)$ dengan $V(H_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan $E(H_5) = \{\text{UOR}, \text{Teater}, \text{Musik}\}$ dengan masing-masing *hyperedge* pada H_5 adalah $UOR = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $Teater = \{v_3, v_4, v_5\}$, dan $MUSIC = \{v_4, v_7\}$. Dari *hyperedge* tersebut, dapat terlihat bahwa dari tujuh mahasiswa, yang sama-sama menjadi anggota UKM Olahraga adalah mahasiswa v_1, v_2, v_3, dan v_4. Sedangkan yang menjadi anggota UKM Teater ada tiga mahasiswa yaitu v_3, v_4, dan v_5. Terdapat dua mahasiswa yang menjadi anggota UKM Musik yaitu v_4 dan v_7. Pada hipergraf H_5, terdapat titik terpencil v_6. Artinya, mahasiswa v_6 tidak mengikuti ketiga UKM tersebut.

Pada bidang biologi, hipergraf dapat digunakan untuk memodelkan hubungan kompetisi antarhewan. Titik menggambarkan spesies hewan dan *hyperedge* menyatakan himpunan bagian dari spesies yang memiliki mangsa yang sama. Satu himpunan bagian untuk satu mangsa.

Pada bidang kimia, hipergraf digunakan untuk memodelkan struktur molekul. Titik pada hipergraf menyatakan atom pada suatu molekul sedangkan *hyperedge* menyatakan ikatan kimia. *Hyperedge* dengan bilangan kardinal tepat 2 bersesuaian dengan ikatan kovalen sederhana sedangkan *hyperedge* dengan bilagan kardinal lebih dari 2 bersesuaian dengan ikatan polisentrik. Elena dan Vladimir (2001) mengkaji representasi hipergraf dalam memodelkan struktur molekul non-klasik dengan ikatan polisentrik terdelokalisasi dan sifat-sifatnya. Representasi hipergraf untuk memodelkan struktur molekul disebut *molecular* hipergraf. Pada penelitiannya, representasi hipergraf dari *allylic complexe* memperlihatkan bahwa derajat titik yang merepresentasikan atom metal dan atom karbon bersesuaian dengan nilai valensi dari atom tersebut. Berikut diberikan gambar molekul *allylic complex* dengan representasi graf dan hipergrafnya dari Elena dan Vladimir (2001).



Gambar 2. Representasi hipergraf di bidang kimia

Hipergraf dapat digunakan dalam *Reconfigurable Interconnection Network* (RIN). RIN adalah rancangan khusus untuk mencari solusi *network routing*. RIN terdiri dari terminal dan saklar dimana saklar menghubungkan dua terminal. *Costumized* RIN digunakan untuk mencari solusi *routing* dengan jumlah saklar paling sedikit. Hongbing dkk (2008) melakukan penelitian mengenai *interconnection graph problem* (IGP) untuk menyelesaikan pemodelan RIN. Konsep IGP adalah mencari sebuah graf $G = (V, E)$ dari hipergraf $H = (V, R)$ dengan nilai $|E|$ minimun sedemikian sehingga untuk setiap *hyperedge* $N \in R$, subgraf dari G yang dibangun oleh N terhubung. Selanjutnya graf G disebut graf interkoneksi. IGP ini dapat menyelesaikan pemodelan RIN untuk mencari jumlah saklar minimum. RIN dapat dimodelkan sebagai sebuah graf $G = (V, E)$ dengan V merupakan himpunan titik menyatakan terminal pada RIN dan E merupakan himpunan sisi yang menyatakan saklar pada RIN serta sebuah hipergraf $H = (V, R)$ dengan R merupakan himpunan *hyperedge* yang menyatakan *routing requirements*. Dengan IGP, jumlah saklar minimum dari model RIN diperoleh dari graf interkoneksi $G = (V, E)$ dengan nilai $|E|$ paling sedikit.

3. KESIMPULAN DAN SARAN

Hipergraf merupakan generalisasi dari graf dimana sisi pada hipergraf dapat menghubungkan lebih dari dua titik. Pada hipergraf, jumlah semua derajat titik sama dengan banyaknya *flag* dan jumlah semua bilangan kardinal dari *hyperedge*. Akibatnya, banyaknya titik berderajat ganjil pada sebuah hipergraf genap jika dan hanya jika banyaknya *hyperedge* yang bilangan kardinalnya ganjil pada hipergraf tersebut berjumlah genap.

Selanjutnya, berikut terdapat sifat-sifat hipergraf berkaitan dengan konektivitas pada hipergraf dan dual hipergraf.

1. Entri pada matriks ketetanggan pangkat k dari suatu hipergraf sederhana menunjukkan banyaknya jalan dengan panjang k dari semua pasangan titik hipergraf tersebut.
2. *Trail* pada sembarang hipergraf tidak mempunyai dua titik dan dua *hyperedge* berurutan yang sama, termasuk *hyperedge* pertama dan terakhir pada *trail* tertutup.
3. Pada hipergraf yang tidak memuat *loop*, setiap *strict trail* merupakan *trail* tetapi tidak sebaliknya.
4. Setiap lintasan pada sembarang hipergraf pasti merupakan *strict trail* dan *trail*, tapi tidak sebaliknya.

5. Derajat dari sebuah titik pada sebuah hipergraf akan sama dengan bilangan kardinal dari *hyperedge* yang bersesuaian dengan titik tersebut pada dual hipergrafnya.

Peneliti selanjutnya dapat mengkaji tentang teori lainnya pada hipergraf seperti subhipergraf, hipergraf reguler, isomorfisma pada hipergraf dan hipergraf berarah. Selain itu, untuk representasi hipergraf pada struktur molekul dapat dipelajari lebih lanjut mengenai sifat-sifat *molecular* hipergraf dikaitkan dengan derajat, matriks insiden, dan matriks ketetanggaan.

DAFTAR PUSTAKA

Bahmanian, M. A. dan Sajna, M., *Hypergraphs : Connection and Separation*, Theory and Applications of Graphs, **2**(11) (2015), 1-24.

Bretto, A., *Hypergraph Theory, An Introduction*, Springer, Switzerland, 2013.

Fan, H., Hundt, C., Wu, Y. L., dan Ernst, J., *Algorithms and Implementation for Interconnection Graph Problem*, dalam Yang et al. (eds.), *Proceeding of International Conference on Combinatorial Optimization and Applications (COCOA)*, St. John’s, NL, Canada August 21-24, 2008, 201-210.

Konstantinova, E. V., & Skorobogatov, V. A., *Application of Hypergraph Theory in Chemistry*, Discrete Mathematics, **235**(1-3) (2001), 365–383.