SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL BOLTZMANN LINEAR

Agus Sugandha

Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Jenderal Soedirman
Purwokerto, Indonesia
Email : agussugandha@ymail.com

ABSTRACT. *In this research, it will be discussed the way to find the solution of linear Boltzmann differential equation. The solution of linear Boltzmann differential equation is a fixed point of Markov Operator.*

Keywords. *Boltzmann differential equation, Markov Operator, fixed point.*

1. PENDAHULUAN

Banyak metode untuk mencari solusi dari suatu persamaan diferensial. Akan tetapi secara umum adalah sulit untuk mencari solusi umum dari suatu persamaan diferensial. Pada tulisan ini akan dibahas bagaimana mencari solusi dari persamaan diferensial Boltzmann linear. Sedangkan proses untuk mendapatkan persamaan diferensial Boltzmann linear dapat dilihat di Lasota dan Mackey (1994).

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelum membahas solusi dari persamaaan Diferensial Boltzmann linear terlebih dahulu diberikan konsep teori ukuran dan integral Lebesgue.

2.1 Ukuran dan Ruang Ukuran

Definisi 2.1.1 (Royden, 1989). Diberikan X himpunan tak kosong. Yang dimaksud dengan aljabar s himpunan pada X adalah suatu koleksi $\mathrm{A} \subset 2^X$ yang tertutup terhadap operasi komplemen dan gabungan terhitung, yaitu jika memenuhi sifat-sifat berikut :

(a) Jika $A \in \mathrm{A}$ maka $A^c \in \mathrm{A}$

(b) Jika $\{A_i\} \subset \mathrm{A}$ maka $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathrm{A}$.

Selanjutnya pasangan himpunan $X \neq f$ dan suatu aljabar-s himpunan $A \subset 2^X$ pada X, ditulis $(X,$ A), disebut ruang terukur (measurable space) dan setiap anggota ruang terukur $(X,$ A) disebut himpunan terukur.

Definisi 2.1.2 (Royden, 1989). Diberikan ruang terukur $(X,$ A). Fungsi himpunan $m:$ A $\rightarrow R$ disebut ukuran (measure) pada ruang terukur $(X,$ A), jika memenuhi sifat-sifat berikut :

(a) $m(f) = 0$

(b) $m(A) \geq 0$ untuk setiap $A \in$ A

(c) Jika $\{A_k\} \subset$ A merupakan barisan himpunan-himpunan yang saling asing maka berlaku

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Selanjutnya jika m suatu ukuran pada ruang terukur $(X,$ A) maka $(X,$ A, m) disebut ruang ukuran (measure space). Jika $A \in$ A maka $m(A)$ disebut ukuran himpunan A.

Definisi 2.1.3. Ruang ukuran $(X,$ A, m) dikatakan s-finite jika terdapat barisan $\{A_k\} \subset$ A yang memenuhi $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ dan $m(A_k) < \infty$ untuk setiap k.

2.2 Operator Markov dan Operator Perron Frobenius

Definisi 2.2.1. Diberikan $(X,$ A, $m)$ ruang ukuran lengkap dan s-finite. Setiap operator linear $P: L^1 \rightarrow L^1$ yang memenuhi :

(a) $Pf \geq 0$ untuk setiap $f \in L^1$, $f \geq 0$

(b) $\|Pf\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$ dengan $\|f\|_{L^1} = \int_X |f| dm$ disebut operator Markov.

Definisi 2.2.2. Diberikan $(X,$ A, $m)$ ruang ukuran lengkap dan s-finite, dan $P : L^1 \to L^1$ operator Markov. Fungsi $f \in L^1$ dikatakan titik tetap (*fixed point*) P jika berlaku $Pf = f$.

Definisi 2.2.3 (Lasota dan Mackey, 1994). Diberikan $(X,$ A, $m)$ ruang ukuran lengkap dan s-finite. Transformasi terukur (*measurable*) $S : X \to X$ dikatakan nonsingular jika $m\left(S^{-1}(A)\right) = 0$ untuk setiap $A \in$ A dengan $m(A) = 0$.

Definisi 2.2.4 (Lasota dan Mackey, 1994). Diberikan $(X,$ A, $m)$ ruang ukuran lengkap dan s-finite, dan $S : X \to X$ transformasi nonsingular. Operator $P_S : L^1 \to L^1$ yang memenuhi

$$\int_A P_S f dm = \int_{S^{-1}(A)} f dm \text{ untuk setiap } A \in \text{ A}$$

disebut operator Perron-Frobenius yang bersesuaian dengan *S*.

Definisi 2.2.5. Diberikan operator $T_t : L^p \to L^p$, $1 \le p \le \infty$, $t \ge 0$. Keluarga $\{T_t\}_{t \ge 0}$ disebut semigrup operator linear kontraksi (semigrup kontraksi) jika T_t memenuhi kondisi berikut :

(a) $T_t\left(l_1 f_1 + l_2 f_2\right) = l_1 T_t f_1 + l_2 T_t f_2$ untuk setiap $f_1, f_2 \in L^p$, $l_1, l_2 \in R$

(b) $\|T_t f\| \le \|f\|_{L^p}$ untuk setiap $f \in L^p$

(c) $T_0 f = f$ untuk setiap $f \in L^p$

(d) $T_{t+t'} = T_t(T_{t'} f)$ untuk setiap $f \in L^p$.

Jika $\lim_{t \to t_0} \left\|T_t f - T_{t_0} f\right\|_{L^p} = 0$ maka semigrup ini dikatakan kontinu.

Definisi 2.2.6. Operator $A:\mathrm{D(A)} \to L^p$, $1 \le p \le \infty$ dengan

$$\mathrm{D(A)} = \left\{ f \in L^p \,/\, Af = \lim_{t \to 0} \frac{T_t f - f}{t} \text{ ada dan konvergen kuat} \right\}$$

disebut dengan operator infinitesimal.

Berikut ini adalah Teorema Hille Yosida dan Akibatnya.

Teorema 2.2.7. Diberikan $A:\mathrm{D(A)} \to L^p$ operator linear dengan $\mathrm{D(A)} \subset L^p$ adalah subruang linear di L^p. Operator A adalah infinitesimal untuk semigrup kontraksi dan kontinu, adalah perlu dan cukup bahwa tiga kondisi berikut dipenuhi :

a) D(A) adalah rapat di L^p, yaitu setiap titik di L^p adalah limit kuat dari barisan titik D(A)

b) Untuk setiap $f \in L^p$ terdapat solusi tunggal $g \in$ D(A) dari persamaan resolven $lg - Ag = f$

c) Untuk setiap $g \in$ D(A) dan $l > 0$ berlaku $\left\| lg - Ag \right\|_{L^p} \ge l \left\| g \right\|_{L^p}$,

sehingga jika A memenuhi (a)-(c) maka semigrup yang berkaitan dengan A adalah tunggal dan diberikan oleh

$$T_t f = \lim_{l \to \infty} e^{tA_l} f \ , \ f \in L^p$$

dengan $A_l = lAR_l$ dan $R_l f = g$ (operator resolven) adalah solusi tunggal dari $lg - Ag = f$.

Akibat 2.2.8. Diberikan $A:\mathrm{D(A)} \to L^p$ adalah operator yang memenuhi (a)-(c) dari teorema Hille Yosida. Jika solusi $R_l f = g$ dari (2.2.7) sedemikian sehingga lR_l adalah operator Markov, maka $\{T_t\}_{t \ge 0}$ dibangkitkan oleh semigrup kontinu dari operator Markov.

Untuk lR_l operator Markov cukup diperiksa untuk kondisi (a) dan (b) dari teorema Hille-Yosida , untuk kondisi (c) otomatis dipenuhi. Karena dengan mengambil $f = lg - Ag$, ketidaksamaan $\|f\|_{L^p} \geq \|lR_l f\|_{L^p}$ selalu dipenuhi jika lR_l operator Markov.

2.3 Solusi Persamaan Diferensial Boltzmann Linear

Suatu persamaan diferensial yang berbentuk

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -u(t,x) + Pu(t,x) \tag{2.3.1}$$

dengan kondisi awal $u(0,x) = f(x)$, disebut dengan persamaan diferensial Boltzmann Linear, dengan P adalah operator Perron-Frobenius yang berkaitan dengan transformasi nonsingular $S : X \to X$, $u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k P^k f(x)$ dan $p_k(t) = \frac{(lt)^k}{k!} e^{-lt}$.

Andaikan solusi $u(t,x)$ merupakan fungsi dari bilangan real positip R^+ ke L^1 $u : R^+ \to L^1$. Sehingga persamaan diferensial (2.3.1) diatas dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{du}{dt} = (P - I)u \tag{2.3.2}$$

dengan P adalah operator Markov dan I adalah operator identitas.

Operator $(P - I)$ memenuhi asumsi (a)-(c) dari teorema Hille Yosida. Karena $(P - I)$ didefinisikan di L^1 dan dengan mengambil D(A) $= L^1$ maka sifat (a) dipenuhi. Untuk memeriksa sifat b) Misalkan persamaaan resolven $lf - Af = g$ dengan A= $P - I$, sehingga diperoleh persamaan

$$(l + 1)f - Pf = g \; . \tag{2.3.3}$$

Persamaan (2.3.3) dapat diselesaikan dengan metode approksimasi suksesif. Untuk sebarang f_0 didefinisikan f_n dengan

$$(l+1)f_n - Pf_{n-1} = g \tag{2.3.4}$$

Sehingga diperoleh

$$f_n = \frac{1}{(l+1)^n} P^n f_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(l+1)^k} P^{k-1} g \tag{2.3.5}$$

Karena $\left\| P^k g \right\|_{L^p} \le \left\| g \right\|_{L^p}$ dan deret dari norm $\left\| g \right\|_{L^p}$ konvergen maka $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(l+1)^k} P^{k-1} g$ konvergen. Dan solusi tunggal f dari persamaan resolven (2.3.3) diberikan oleh

$$f = R_l g = \lim_{n\to\infty} f_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(l+1)^k} P^{k-1} g \tag{2.3.6}$$

Untuk memeriksa persamaan diferensial Boltzmann linear memenuhi sifat c) dari teorema Hille-Yosida, integralkan persamaan (2.3.6) untuk memberikan

$$\begin{aligned} \int_X R_l g(x) dm &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(l+1)^k} \int_X P^{k-1} g(x) dm \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(l+1)^k} \int_X g(x) dm \\ &= \frac{1}{l} \int_X g(x) dm = \frac{1}{l} . \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\int_X l R_l g(x) dm = 1 .$$

Karena $l R_l$ linear, non negatif, dan mengawetkan integral maka $l R_l$ adalah operator Markov. Sehingga sifat c) secara otomatis dipenuhi (Akibat 2.2.8).

Dengan menggunakan teorema Hille Yosida dan Akibat 2.2.8, persamaan diferensial Boltzmann linear (2.3.1) membangkitkan semigrup kontinu dari Operator Markov $\{P_t\}_{t\ge 0}$.

Untuk menentukan rumus eksplisit $\hat{P}_t$, andaikan

$$A_l f = lAR_l f = l(P-I)R_l f$$

$$= l(P-I)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(l+1)^k}P^{k-1}f - l\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(l+1)^k}P^{k-1}f$$

$$\lim_{l\to\infty} A_l f = Pf = f \ .$$

Jadi dengan menggunakan teorema Hille-Yosida, semigrup tunggal yang berkaitan dengan $A = (P-I)$ diberikan oleh

$$\hat{P} f = e^{t(P-I)} f \qquad (2.3.7)$$

dan solusi tunggal persamaan (2.3.7) dengan kondisi awal $u(0,l) = f(x)$ adalah

$$u(t,x) = e^{t(P-I)} f(x) \ .$$

3. KESIMPULAN DAN SARAN

3.1 Kesimpulan

Solusi persamaan diferensial Botzmann linear sebenarnya merupakan suatu titik tetap dari Operator Markov.

3.2 Saran

Tulisan ini hanya membahas pada $P : L^1 \to L^1$, dengan P operator Markov dan operator Perron-Frobenius yang bersesuaian dengan fungsi non singular $S : X \to X$ pada ruang ukuran (X, A, m). Hal ini dapat dikembangkan dengan menggunakan $P : L^\infty \to L^\infty$, $P : L^p \to L^p$ dengan $1 < p < \infty$ dan $P : L^p \to L^q$ dengan syarat $p > q$.

4. DAFTAR PUSTAKA

Jain and Gupta, *Lebesgue Measure and Integration,* Wiley Eastern Limited, 1986.

Kreyszeig, E., *Introductory Functional Analysis With Applications,* John Wiley and Sons, 1978.

Lasota, A. and Mackey, M.C., *Chaos, Fractals, and Noise : Stochastic Aspect of Dinamic,* Applied Mathematical Science, vol. 97, Springer-Verlag, New York, 1994.

Pazy, A., *Semigroup of liniar Operatos and Applications to Partial Differential equations,* Springer-Verlag, New York, 1983.

Royden, H.L., *Real Analysis,* Third Edition, Macmillan, New York, 1989.