KETAKSAMAAN CAUCHY SCHWARZ PADA RUANG HASIL KALI DALAM-*2*

Sri Maryani

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Tekink
Universitas Jenderal Soedirman, Purwokerto
Email : srimary_math_97@yahoo.com

ABSTRACT. *Cauchy-Schwarz inequality is an important property on inner product spaces. This inequality can be generalized to 2-inner product spaces. We can be inducted a norm from those inner product spaces and then generalized that norm to 2-norm. This paper will reprove Cauchy-Schwarz inequality used positive semi definite of Gram matrix such that sub-matrix of Gram determinant is non-negative.*

Keywords. *Cauchy-Schwarz, 2-inner product spaces, 2-norm, Gram matrix, Gram determinant.*

1. PENDAHULUAN

Hasil kali dalam merupakan salah satu konsep penting dalam mempelajari sifat-sifat geometri pada bidang ataupun ruang. Salah satu dari sifat geometri tersebut diantaranya adalah panjang suatu garis dan sudut yang dibentuk antara dua buah garis pada ruang *Euclid* kompleks atau yang dikenal sebagai ruang *uniter*. Sifat-sifat geometri tersebut dinamakan sifat metrik. Sifat metrik tersebut dapat diekspresikan sebagai hasil kali dalam pada C^n. Pendefinisian hasil kali dalam merupakan generalisasi dari hasil kali titik (dot product).

Hasil Kali Dalam (inner product) dari dua buah vektor $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ di C^n secara umum didefinisikan sebagai berikut:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

dengan $\overline{y_i}$ adalah konjugat (sekawan) dari y_i. Hasil Kali Dalam (inner product) tersebut dapat kita perluas menjadi hasil kali dalam-*n* dengan $n \geq 2$. Selanjutnya, untuk $n = 2$, kita sebut sebagai hasil kali dalam-*2* yang merupakan fungsi bernilai kompleks. Bentuk hasil kali dalam-*2* tersebut dinotasikan $\langle x, y | z \rangle$. Sementara dari hasil kali dalam-*2* dapat kita induksi suatu bentuk norm yang juga merupakan

Diterima 30 Desember 2008, disetujui untuk dipublikasikan 21 April 2009.

fungsi bernilai real tak negative. Bentuk norm tersebut dinotasikan dengan $\|x, y\|$. Notasi tersebut dapat diinterpretasikan sebagai luas jajaran genjang yang dibangun oleh dua buah vektor x dan y. Gunawan mendefinisikan hasil kali dalam-*2* lebih sederhana [4] (Gunawan,2002:55).

Salah satu sifat penting dari hasil kali dalam-*2* adalah ketaksamaan Cauchy Schwarz. Kita dapat menunjukkan ketaksamaan Cauchy Schwarz tersebut dengan menggunakan sifat semidefinit positif dari matriks Gram.

Secara khusus proses pembuktian Ketaksamaan Cauchy Schwarz pada Ruang Hasil Kali Dalam-*2* dapat dilihat pada bagian tiga yaitu pada bagian hasil dan pembahasan.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Ruang Hasil Kali Dalam Kompleks dan Ruang Norm Kompleks

Definisi :

Misal **X** adalah ruang vektor atas lapangan kompleks **C**. Suatu *Hasil Kali Dalam* pada **X** dapat didefinisikan sebagai pemetaaan $\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbf{C}$, sehingga untuk setiap $x_1, x_2, y \in \mathbf{X}$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbf{C}$ memenuhi sifat :

I1. Aditif

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

I2. Homogen

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

I3. Simetri

$$\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$$

I4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

Pasangan $(\mathrm{X}, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ disebut *ruang Hasil Kali Dalam kompleks.*

Selain keempat sifat di atas, pada Hasil Kali Dalam juga berlaku ketaksamaan Cauchy Schwarz , yaitu untuk setiap $x, y \in \mathbf{X}$ berlaku :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Ketaksamaan Cauchy Schwarz di atas memenuhi sifat-sifat ynag telah disebutkan di atas.

Definisi :

Norm pada suatu ruang vektor **X** adalah suatu fungsi bernilai real tak negatif di **X** yang didefinisikan sebagai suatu pemetaan $\|\cdot\|: \mathbf{X} \to \mathbf{R}$, sehingga untuk setiap $x, y \in \mathbf{X}$ dan $\alpha \in \mathbf{C}$ memenuhi sifat-sifat :

N1 $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

N2 $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

N3 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Ketaksamaan Segitiga)

Pada ruang hasil kali dalam $(\mathrm{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ dapat kita definisikan suatu norm sebagai berikut :

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Pasangan $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ disebut *ruang norm kompleks.*

Pendefinisian norm diatas memenuhi ketiga sifat norm yang telah disebutkan diatas.

Salah satu pengembangan Hasil Kali Dalam pada suatu ruang vektor **X** adalah hasil kali dalam-*2* yang merupakan suatu pemetaan $\langle\cdot,\cdot|\cdot\rangle$: **X** x **X** x **X** $\to$ **C**, sehingga untuk setiap $x_1, x_2, y, z \in \mathbf{X}$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbf{C}$ memenuhi sifat-sifat :

I1 $\langle x_1, x_1 | y\rangle \geq 0$; $\langle x_1, x_1 | y\rangle = 0$ jika dan hanya jika x_1, y bergantung linear.

I2 $\langle x_1, x_1 | y\rangle = \langle y, y | x_1\rangle$

I3 $\langle x_1, y | z\rangle = \overline{\langle y, x_1 | z\rangle}$

I4 $\langle \alpha x_1, y | z\rangle = \alpha\langle x_1, y | z\rangle$

I5 $\langle x_1 + x_2, y | z\rangle = \langle x_1, y | z\rangle + \langle x_2, y | z\rangle$

Pasangan $\left(X,\langle\cdot,\cdot|\cdot\rangle\right)$ disebut sebagai ruang Hasil Kali Dalam-*2*.

Pada ruang Hasil Kali Dalam $\left(X,\langle\cdot,\cdot|\cdot\rangle\right)$ kita definisikan ruang hasil kali dalam-*2* baku sebagai berikut :

$$\left\langle x,y|z\right\rangle := \begin{vmatrix} \langle x,y\rangle & \langle x,z\rangle \\ \langle z,y\rangle & \langle z,z\rangle \end{vmatrix}$$

Hasil Kali Dalam-*2* baku yang didefinisikan diatas memenuhi sifat hasil kali dalam-*2* yang telah disebutkan diatas

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz

Misalkan **X** adalah ruang Hasil Kali Dalam-*2*. Maka untuk setiap $x,y,z\in\mathbf{X}$ berlaku

$$\left|\left\langle y,z|\,x\right\rangle\right|^2 \le \|y,x\|^2\,\|z,x\|^2$$

Bukti :

Langkah pertama kita akan menunjukkan bahwa matriks

$$\begin{bmatrix} \langle y,y|\,x\rangle & \langle y,z|\,x\rangle \\ \langle z,y|\,x\rangle & \langle z,z|\,x\rangle \end{bmatrix}$$

Bersifat semidefinit positif. Ambil $x=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}\in X$ sebarang dengan $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$ dan misalkan

$$A=\begin{bmatrix} \langle y,y|\,x\rangle & \langle y,z|\,x\rangle \\ \langle z,y|\,x\rangle & \langle z,z|\,x\rangle \end{bmatrix}$$

maka,

$$x^*Ax=\begin{bmatrix}\overline{\alpha} & \overline{\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \langle y,y|\,x\rangle & \langle y,z|\,x\rangle \\ \langle z,y|\,x\rangle & \langle z,z|\,x\rangle \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\overline{\alpha} & \overline{\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha\langle y,y|\,x\rangle+\beta\langle y,z|\,x\rangle \\ \alpha\langle z,y|\,x\rangle+\beta\langle z,z|\,x\rangle \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\overline{\alpha} & \overline{\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y,\alpha y+\beta z|\,x \\ z,\alpha y+\beta z|\,x \end{bmatrix}$$

$$= \overline{\alpha}\langle y, \alpha y + \beta z | x \rangle + \overline{\beta}\langle z, \alpha y + \beta z | x \rangle$$

$$= \langle \alpha y + \beta z, \alpha y + \beta z | x \rangle$$

$$= \|\alpha y + \beta z, x\|^2 \geq 0$$

Karena $x^* A x \geq 0$ maka dapat kita simpulkan bahwa matriks

$$A = \begin{bmatrix} \langle y, y | x \rangle & \langle y, z | x \rangle \\ \langle z, y | x \rangle & \langle z, z | x \rangle \end{bmatrix}$$

bersifat semidefinit positif sehingga diperoleh

$$\begin{vmatrix} \langle y, y | x \rangle & \langle y, z | x \rangle \\ \langle z, y | x \rangle & \langle z, z | x \rangle \end{vmatrix} \geq 0$$

Dengan menggunakan sifat determinan, kita dapatkan

$$\langle y, y | x \rangle \langle z, z | x \rangle - \langle y, z | x \rangle \langle z, y | x \rangle \geq 0$$

Berdasarkan sifat $\langle z, y | x \rangle = \overline{\langle z, y | x \rangle}$ dan $\langle y, z | x \rangle \overline{\langle y, z | x \rangle} = |\langle y, z | x \rangle|^2$ kemudian pindahkan suku kedua pada ruas kiri ke sebelah kanan, kita peroleh

$$|\langle y, z | x \rangle|^2 \leq \|y, x\|^2 \|z, x\|^2$$

$$|\langle y, z | x \rangle| \leq \|y, x\| \|z, x\|$$

3. KESIMPULAN DAN SARAN

3.1 Kesimpulan

Artikel ini telah menghasilkan ketaksamaan Cauchy-Schwarz pada ruang hasil kali dalam-*2* dengan menggunakan sifat semidefinit positif pada matriks Gram.

3.2 Saran

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz pada ruang hasil kali dalam-*2* dengan menggunakan sifat semidefinit positif pada matriks Gram dapat kita perluas pada ruang hasil kali dalam-*n*.

4. Ucapan Terima Kasih

Pada penulisan makalah ini saya haturkan terima kasih yang sebesar-besarnya pada pembimbing tesis saya Bapak Prof. Dr. Hendra Gunawan yang telah memberikan bimbingan dan ilmunya sehingga saya bisa menuliskan kembali sebagian dari tesis saya ini ke dalam bentuk artikel.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton-Rores, *Elementary Linear Algebra*, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1973.

[2] B. Jacob, *Linear Algebra*, W.H. Freeman and Company, New York, 1990.

[3] E. Kreyzig, *Advanced Engineering Mathematic*s, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1973.

[4] H. Gunawan, *On n-Inner Products, n-Norms and the Cauchy Schwarz inequality*, Sci. Math. Jpn., **55**(2002).53-60.

[5] H. Gunawan, *Inner Products On n-Inner Product Spaces*, Souchow Journal of Math. Taipei., **391**(2002), 389-398.

[6] N. Young, *An Introduction to Hilbert Spaces*, Cambride Univ Press, New York / Cambridge, 1988.

[7] R. Horn and C. Johnson, *Matrix Anal*ysis, Cambridge Univ. Press, New York / Cambridge, 1985.

[8] R. Valenza, *Linear Algebra An Introduction to Abstract Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1993.