Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP)
Vol. 12 No. 1, Juni 2020, hal. 15-24
ISSN (Cetak) : 2085-1456; ISSN (*Online*) : 2550-0422

TEORI TITIK TETAP UNTUK PEMETAAN QUASI-KONTRAKSI YANG DIPERUMUM PADA RUANG BERMODULAR

Afifah Hayati

Universitas Nahdlatul Ulama Purwokerto
afifahhayati.mail@gmail.com

Dian Pratama

Universitas Nahdlatul Ulama Purwokerto

Noor Sofiyati

Universitas Nahdlatul Ulama Purwokerto

ABSTRACT. *In the metric spaces, a generalized quasi-contraction mapping is defined as a generalization of quasi-contraction mappings. In this article we give a fixed point theorem for generalized quasi-contraction mappings in modular spaces.*

Keywords: *fixed point theorem, generalized quasi-contraction mappings, modular spaces.*

ABSTRAK. Pada ruang metrik, didefinisikan pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum dari pemetaan quasi-kontraksi. Pada artikel ini, akan dibahas mengenai teori titik tetap untuk pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum pada ruang bermodular.

Kata Kunci: Teori titik tetap, pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum, ruang bermodular.

1. PENDAHULUAN

Dewasa ini, perumuman dari teorema titik tetap berkembang pesat karena teorema ini memiliki cukup banyak aplikasi. Salah satu aplikasi teorema tersebut adalah untuk membuktikan eksistensi penyelesaian suatu sistem persamaan diferensial. Jenis pemetaan yang dibicarakan dalam teorema titik tetap pada jurnal ini adalah pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum sebagai perumuman dari pemetaan quasi-kontraksi pada ruang bermodular.

Penyusunan artikel ini bertujuan untuk mengetahui perumuman pemetaan quasi-kontraksi, yaitu pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum pada ruang bermodular. Selain itu, artikel ini juga bertujuan untuk mengetahui teorema titik tetap untuk pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum pada ruang bermodular.

Dalam mempelajari titik tetap, diperlukan beberapa konsep dalam ruang metrik maupun bernorma yang dijelaskan oleh Berberian (1961). Ćirić (1974) memperkenalkan konsep pemetaan quasi kontraksi pada ruang metrik dan teori titik tetap untuk pemetaan tersebut. Sementara itu, F. Kiany dan A. Amini-Harandi (2013) memperkenalkan pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum pada ruang metrik dan teori titik tetap untuk pemetaan tersebut. Musielak (1983) memperkenalkan suatu fungsional yang lebih umum daripada norma yang disebut modular. Selanjutnya, Khamsi (2008) melakukan penelitian mengenai pemetaan quasi-kontraksi serta teorema titik tetap untuk pemetaan tersebut pada ruang bermodular. Selain membutuhkan konsep-kosep tersebut, diperlukan pula sifat-sifat ruang bermodular yang dibahas oleh Musielak (1983) dan sifat barisan pada ruang bermodular dibahas oleh Khamsi (2008).

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini diawali dengan membaca literatur-literatur hasil penelitian terkait ruang bermodular dan pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum yang menjadi dasar untuk mempelajari perumuman pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum pada ruang bermodular. Adapun langkah yang digunakan adalah sebagai berikut

1. Memberikan definisi ruang bermodular beserta sifat-sifatnya;
2. Mendefinisikan pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum pada ruang bermodular dan teorema titik tetap untuk pemetaan tersebut.

Beberapa definisi dan teorema dibutuhkan untuk membuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum pada ruang bermodular.

Definisi 1. Diketahui (X, d) ruang metrik. Pemetaan $T: X \to X$ disebut pemetaan quasi kontraksi yang diperumum jika terdapat pemetaan $\alpha: [0, \infty] \to [0,1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$d\big(T(x), T(y)\big) \leq \alpha\big(d(x, y)\big) \times \max\{d(x, y); d\big(x, T(x)\big); d\big(y, T(y)\big); d\big(x, T(y)\big); d(y, T(x))\}.$$

Pada tahun 2013, F. Kiany dan A. Amini-Harandi, memberikan teorema titik tetap untuk pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum pada ruang metrik (X, d) yang diperumum dengan metrik d dapat bernilai tak terbatas. Berikut adalah teorema tersebut.

Teorema 2. Diketahui (X, d) ruang metrik lengkap yang diperumum dan $T: X \to X$ merupakan pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum dengan barisan $\{T^n(x_0)\}$ terbatas, utnuk suatu $x_0 \in X$ serta $d\big(x, T(x)\big) < \infty$, untuk setiap $x \in X$. Jika $limsup_{t\to r}\alpha(t) < 1$, untuk setiap $r \in [0, \infty)$, maka T mempunyai titik tetap $\bar{x} \in X$ dan $\lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = \bar{x}$. Lebih lanjut, jika $\bar{y}$ titik tetap T, maka $d(\bar{x}, \bar{y}) = \infty$ atau $\bar{x} = \bar{y}$.

Selanjutnya, akan dibahas mengenai teorema titik tetap untuk pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum pada ruang bermodular. Oleh karena itu, akan dibahas terlebih dahulu mengenai ruang bermodular.

Definisi 3. Diberikan X ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$. Fungsional $\rho: X \to [0, \infty]$ disebut modular jika untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

(i) $\rho(x) = 0$ jika dan hanya jika $x = \theta$,

(ii) $\rho(-x) = \rho(x)$, dan

(iii)$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, untuk setiap $\alpha, \beta \geq 0$ dan $\alpha + \beta = 1$.

Jika (iii) diganti dengan

(iv)$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$, untuk setiap $\alpha, \beta \geq 0$ dan $\alpha + \beta = 1$,

maka ρ disebut modular konveks.

Selanjutnya, ruang vektor X yang dilengkapi dengan modular ρ disebut ruang bermodular dan dinotasikan dengan (X, ρ). Salah satu subruang vektor penting pada ruang bermodular (X, ρ) adalah $X_\rho = \{x \in X: \lim_{\lambda\to 0} \rho(\lambda x) = 0\}$. Pada pembahasan selanjutnya, yang dimaksud ruang bermodular adalah X_ρ.

Seperti halnya pada ruang metrik, dapat didefinisikan pula barisan konvergen dan barisan Cauchy pada ruang bermodular.

Definisi 4. Diberikan X_ρ ruang bermodular.

(i) Barisan $\{x_n\}_n \subseteq X_\rho$ dikatakan ρ-konvergen ke $x \in X_\rho$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$ berlaku $\rho(x_n - x) < \varepsilon$. Selanjutnya, x disebut ρ-limit barisan $\{x_n\}_n$ dan barisan $\{x_n\}_n$ yang ρ-konvergen ke x dapat dituliskan dengan $\rho(x_n - x) \to 0$, untuk $n \to \infty$.

(ii) Barisan $\{x_n\}_n \subseteq X_\rho$ disebut barisan ρ-Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ dengan $n, m \geq n_0$ berlaku $\rho(x_n - x_m) < \varepsilon$. Selanjutnya, barisan $\{x_n\}_n$ yang merupakan barisan ρ-Cauchy dapat dituliskan dengan $\rho(x_n - x_m) \to 0$, untuk $n, m \to \infty$.

Pada ruang metrik, setiap barisan konvergen merupakan barisan Cauchy. Namun, hal tersebut tidak berlaku pada ruang bermodular. Oleh karena itu, perlu syarat tambahan agar hal tersebut berlaku pada ruang bermodular, yaitu kondisi Δ_2 yang akan dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 5. Diberikan X ruang vektor atas $\mathbb{R}$. Modular ρ pada X dikatakan memenuhi kondisi Δ_2 jika terdapat $K > 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$ berlaku $\rho(2x) \leq K\rho(x)$.

Definisi 6. Ruang bermodular X_ρ dikatakan ρ-lengkap jika setiap barisan ρ-Cauchy di dalam X_ρ merupakan barisan ρ-konvergen di dalam X_ρ.

Berikut ini akan diberikan definisi quasi-kontraksi yang diperumum pada ruang bermodular.

Definisi 7. Diberikan X_ρ ruang bermodular dan $C \subseteq X_\rho$ himpunan tak kosong. Pemetaan $T: C \to C$ disebut pemetaan ρ-quasi-kontraksi yang diperumum jika terdapat pemetaan $\alpha: [0, \infty] \to (0,1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in C$ berlaku

$$\rho\big(T(x)-T(y)\big) \leq \alpha\big(\rho(x,y)\big)$$
$$\times \max\{\rho(x,y), \rho\big(x,T(x)\big), \rho\big(y,T(y)\big), \rho\big(x,T(y)\big), \rho(y,T(x))\}.$$

Pada pembuktian teorema titik tetap untuk pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum pada ruang bermodular, diperlukan beberapa definisi dan lemma sebagai berikut.

Definisi 8. Modular ρ pada X dikatakan memenuhi sifat Fatou jika untuk setiap barisan $\{x_n\} \subseteq X$ yang ρ-konvergen ke x berakibat $\rho(x) \leq liminf_{n\to\infty}\rho(x_n)$.

Definisi 9. Diberikan X_ρ ruang bermodular, $C \subseteq X_\rho$ himpunan tak kosong, dan $T: C \to C$ pemetaan ρ-quasi-kontraksi. Untuk setiap $x \in C$ didefinisikan

$$O(x) = \{x, T(x), T^2(x), \dots .\}$$

dan

$$\delta_\rho(x) = diam\,\big(O(x)\big) = \sup\{\rho\big(T^n(x) - T^m(x)\big); n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Selanjutnya, $O(x)$ dan $\delta_\rho(x)$ berturut-turut disebut orbit dari x dan ρ-diameter dari $O(x)$.

Lemma 10. Diberikan X_ρ ruang bermodular, $C \subseteq X_\rho$ himpunan tak kosong, dan $T: C \to C$ merupakan pemetaan ρ-quasi-kontraksi yang diperumum. Jika $limsup_{t\to r}\alpha(t) < 1$, untuk setiap $r \in [0,\infty)$ dan $x \in C$ dengan $\delta_\rho(x) < \infty$, maka terdapat $k \in (0,1)$ sehingga untuk setiap $n \geq 1$ berlaku $\delta_\rho\big(T^n(x)\big) \leq k^n\delta_\rho(x)$. Lebih lanjut, untuk setiap $n \geq 1$ dan $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ berlaku $\rho\big(T^n(x) - T^{n+m}(x)\big) \leq k^n\delta_\rho(x)$.

Lemma 11. Diberikan X_ρ ruang bermodular dengan ρ modular yang memenuhi sifat Fatou, $C \subseteq X_\rho$ himpunan tak kosong yang ρ-lengkap, serta $T: C \to C$ merupakan pemetaan ρ-quasi-kontraksi yang diperumum. Jika $limsup_{t\to r}\alpha(t) < 1$, untuk setiap $r \in [0,\infty)$ dan $x \in C$ dengan $\delta_\rho(x) < \infty$, maka barisan $\{T^n(x)\}$

ρ-konvergen ke $w \in C$. Lebih lanjut, untuk setiap $n \geq 1$ berlaku $\rho(T^n(x) - w) \leq k^n \delta_\rho(x)$.

Berikut merupakan teorema titik tetap untuk pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum pada ruang bermodular.

Teorema 12. Diberikan X_ρ ruang bermodular dengan ρ modular yang memenuhi sifat Fatou, $C \subseteq X_\rho$ himpunan tak kosong yang ρ-lengkap dengan $\rho\big(T(x) - T(y)\big) < \infty$, untuk setiap $x, y \in C$, dan $T: C \to C$ merupakan pemetaan ρ-quasi-kontraksi yang diperumum. Jika $limsup_{t\to r}\alpha(t) < 1$, untuk setiap $r \in [0, \infty)$ dan $x \in C$ dengan $\delta_\rho(x) < \infty$, maka w ρ-limit barisan $\{T^n(x)\}$ merupakan titik tetap T dengan $T(w) = w$. Lebih lanjut, jika w^* titik tetap T pada C dan $\rho(w - w^*) < \infty$, maka $w = w^*$.

Bukti. Berdasarkan Lemma 11**,** cukup jelas bahwa terdapat $w \in C$ sehingga barisan $\{T^n(x)\}$ ρ-konvergen ke w atau w ρ-limit barisan $\{T^n(x)\}$. Selanjutnya, tinggal membuktikan w merupakan titik tetap T. Sebelumnya, dengan induksi matematika, akan dibuktikan bahwa untuk setiap $n \geq 2$ terdapat $c \in (0,1)$ sehingga

$$\rho\big(T^n(x) - T(w)\big) \leq \max\{c^n \delta_\rho(x), c\rho\big(w - T(w)\big), c^{n-1}\rho(T(x) - T(w))\}.$$

Untuk membuktikan pernyataan tersebut, perlu dibuktikan bahwa terdapat $k_1 \in (0,1)$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\alpha\left(\rho\big(w - T^n(x)\big)\right) < k_1 \tag{1}$$

Andaikan terdapat subbarisan $\left\{\alpha\left(\rho\big(w - T^{n_j}(x)\big)\right)\right\} \subseteq \{\alpha(\rho(w - T^n(x)))\}$ sehingga $\lim_{j\to\infty} \alpha\left(\rho\big(w - T^{n_j}(x)\big)\right) = 1$. Karena barisan $\{T^n(x)\}$ ρ-konvergen ke w, maka subbarisan $\{T^{n_j}(x)\} \subseteq \{T^n(x)\}$ ρ-konvergen ke w. Dengan kata lain, $\rho\big(w - T^{n_j}(x)\big) \to 0$, untuk $j \to \infty$ atau $\lim_{j\to\infty} \rho\big(w - T^{n_j}(x)\big) = 0$. Akibatnya, $limsup_{t\to 0^+}\alpha(t) = limsup_{j\to\infty}\alpha\left(\rho\big(w - T^{n_j}(x)\big)\right) = 1$. Terjadi kontradiksi dengan $\lim_{t\to r} \alpha(t) < 1$, untuk setiap $r \in [0, \infty)$, yang berarti pengandaian salah. Jadi, pernyataan (1) terbukti. Karena T merupakan pemetaan ρ-quasi-kontraksi yang diperumum, maka terdapat pemetaan $\alpha: [0, \infty] \to (0,1)$ sehingga

(i) Untuk $n = 2$, diperoleh

$$\rho\big(T^2(x) - T(w)\big) \leq \alpha\big(\rho(T(x), w)\big)$$
$$\times \max\{\rho(T(x), w), \rho\big(T(x), T^2(x)\big), \rho\big(w, T(w)\big), \rho\big(w, T^2(x)\big), \rho(T(x), T(w))\}$$

Dari Pernyataan (1), diperoleh $\alpha\big(\rho(T(x) - w)\big) < k_1$. Selanjutnya, bersadarkan Lemma 10**,** diperoleh $\rho\big(T(x) - T^2(x)\big) \leq k\delta_\rho(x)$ dan berdasarkan Lemma 11**,** diperoleh $\rho(T(x) - w) \leq k\delta_\rho(x)$ dan $\rho(T^2(x) - w) \leq k^2\delta_\rho(x)$. Diambil $c = \max\{k, k_1\} \in (0,1)$, maka diperoleh $\alpha\big(\rho(T(x) - w)\big) < c$, $\rho\big(T(x) - T^2(x)\big) \leq c\delta\_\rho(x)$, $\rho(T(x) - w) \leq c\ \delta_\rho(x)$, dan $\rho(T^2(x) - w) \leq c^2\ \delta_\rho(x)$. Karena $c < 1$, maka $c^2\ \delta_\rho(x) < c\ \delta_\rho(x)$. Akibatnya,

$$\begin{aligned}
&\rho\big(T^2(x) - T(w)\big) \\
&\leq \alpha\big(\rho(T(x) - w)\big) \max\{\rho(T(x) - w), \rho\big(T(x) - T^2(x)\big), \\
&\quad \rho\big(w - T(w)\big), \rho\big(w - T^2(x)\big), \rho(T(x) - T(w))\} \\
&\leq c \max\Big\{c\ \delta_\rho(x), \rho\Big(w - T(w), \rho\big(T(x) - T(w)\big)\Big)\Big\} \\
&= \max\{c^2\ \delta_\rho(x), c\ \rho\big(w - T(w)\big), c\rho(T(x) - T(w))\}.
\end{aligned}$$

(ii) Diasumsikan benar bahwa untuk $n = p$ berlaku $\rho\big(T^p(x) - T(w)\big) \leq \max\{c^p\ \delta_\rho(x), c\rho\big(w - T(w)\big), c^{p-1}\rho(T(x) - T(w))\}$. Akan dibuktikan pernyataan untuk $n = p + 1$ berlaku

$$\begin{aligned}
&\rho\big(T^{p+1}(x) - T(w)\big) \\
&\leq \max\{c^{p+1}\ \delta_\rho(x), c\rho\big(w - T(w)\big), c^p\rho(T(x) - T(w))\}.
\end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa untuk $n = p + 1$, diperoleh

$$\begin{aligned}
&\rho(T^{p+1}(x) - T(w)) \\
&\leq \alpha\rho(T^p(x) - w) \max\{\rho(T^p(x) - w), \rho(T^p(x) - T^{p+1}(x)), \\
&\quad \rho\big(w - T(w)\big), \rho\big(T^p(x) - T(w)\big), \rho(w - T^{p+1}(x))\}.
\end{aligned}$$

Dari Pernyataan (1), diperoleh $\alpha(T^p(x) - w) < k_1$. Selanjutnya, berdasarkan Lemma 10, diperoleh $\rho\big(T^p(x) - T^{p+1}(x)\big) \leq k^p\ \delta_\rho(x)$ dan berdasarkan Lemma 11, diperoleh $\rho(T^p(x) - w) \leq k^p\ \delta_\rho(x)$ dan $\rho\big(w - T^{p+1}(x)\big) \leq k^{p+1}\ \delta_\rho(x)$. Diambil $c = \max\{k, k_1\} \in (0,1)$, maka diperoleh $\alpha(T^p(x) - w) < c$, $\rho\big(T^p(x) - T^{p+1}(x)\big) \leq c^p\ \delta_\rho(x)$, $\rho\big(w - T^{p+1}\,(x)\big) \leq c^{p+1}\ \delta_\rho(x)$. Karena $c < 1$, maka $c^{p+1}\ \delta_\rho(x) \leq c^p\ \delta_\rho(x)$. Akibatnya,

$$
\begin{aligned}
&\rho(T^{p+1}(x) - T(w)\\
&\leq \alpha(T^p(x) - w)\max\{\rho(T^p(x) - w), \rho\big(T^p(x) - \rho^{p+1}(x)\big),\\
&\quad \rho\big(w - T(w)\big), \rho\big(T^p(x) - T(w)\big), \rho(w - T^{p+1}(x))\}\\
&\leq c\max\{c^p\ \delta_\rho(x), \rho\big(w - T(w)\big), \rho(T^p(x) - T(w))\}\\
&\leq c\max\{c^p\ \delta_\rho(x), \rho\big(w - T(w)\big), \max\{c^p\ \delta_\rho(x)\,,\\
&\quad c\rho\big(w - T(w)\big), c^{p-1}\rho\big(T(x) - T(w)\big)\}\}\\
&= c\max\{c^p\ \delta_\rho(x), \rho\big(w - T(w)\big), \max\{c^p\ \delta_\rho(x)\,,\\
&\quad \rho\big(w - T(w)\big), c^{p-1}\rho\big(T(x) - T(w)\big)\}\}\\
&= \max\{c^{p+1}\ \delta_\rho(x), c\rho\big(w - T(w)\big),\ c^p\rho\big(T(x) - T(w)\big)\}
\end{aligned}
$$

Terbukti benar untuk $n \geq 2$ terdapat $c \in (0,1)$ sehingga

$$\rho\big(T^n(x) - T(w)\big) \leq \max\{c^n\delta_\rho(x), c\rho\big(w - T(w)\big), c^{n-1}\rho(T(x) - T(w))\}.$$

Akibatnya,

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \rho(T^n(x) - T(w)) &\leq \limsup_{n\to\infty}\ \max\{c^n\delta_\rho(x), c\rho(w - T(w)),\\
&\qquad c^{n-1}\rho(T(x) - T(w))\}\\
&= c\rho\big(w - T(w)\big).
\end{aligned}
$$

Karena modular ρ memenuhi sifat Fatou dan barisan $\{T^n(x) - T(w)\}$ ρ-konvergen ke $w - T(w)$, maka

$$\rho\big(w - T(w)\big) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(T^n(x) - T(w)).$$

Diperhatikan bahwa $\liminf_{n\to\infty} \rho(T^n(x) - T(w)) \leq \limsup_{n\to\infty} \rho(T^n(x) - T(w))$, maka $\rho\big(w - T(w)\big) \leq c\rho(w - T(w))$. Karena $c < 1$ dan $\rho\big(w - T(w)\big) \leq c\rho(w - T(w))$, maka $\rho\big(w - T(w)\big) = 0$ atau $T(w) = w$. Jadi, benar bahwa w titik tetap T. Lebih lanjut, diambil sebarang w^* titik tetap T

dengan $\rho(w - w^*) < \infty$. Diperhatikan bahwa w^* titip tetap T berarti $T(w^*) = w^*$ sehingga

$$\begin{aligned}\rho(w - w^*) &= \rho(T(w) - T(w^*))\\ &\le \alpha\big(\rho(w - w^*)\big)\max\{\rho(w - w^*), \rho\big(w - T(w)\big), \rho(w^* - T(w^*)),\\ &\quad \rho\big(w - T(w^*)\big), \rho(w^* - T(w))\}\\ &= \alpha\big(\rho(w - w^*)\big)\max\{\rho(w - w^*), 0\}\\ &= \alpha\big(\rho(w - w^*)\big)\rho(w - w^*).\end{aligned}$$

Karena $\alpha\big(\rho(w - w^*)\big) < 1$ dan $\rho(w - w^*) \le \alpha\big(\rho(w - w^*)\big)\rho(w - w^*)$, maka $\rho(w - w^*) = 0$ atau $w = w^*$. ■

3. KESIMPULAN DAN SARAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum di ruang bermodular X_ρ dengan ρ modular yang memenuhi sifat Fatou memiliki titik tetap tunggal dengan pemberian syarat pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum tersebut terbatas terhadap ρ serta pemetaan α yang memenuhi pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum tersebut memiliki limit superior kurang dari satu. Mengingat masih banyak jenis ruang selain ruang metrik dan ruang bermodular, maka tidak menutup kemungkinan pemetaan quasi-kontraksi yang diperumum dapat didefinisikan di ruang yang lain tersebut serta dapat dikembangkan teorema titik tetapnya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat Universitas Nahdlatul Ulama Purwokerto yang telah memberikan kontribusi penting pada pendanaan dan pelaksanaan penelitian serta penulisan artikel ini serta pihak-pihak lain yang telah membantu hingga terselesaikannya artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

Berberian, S. K., *Introduction to Hilbert Spaces*, Oxford University Press, Inc., USA, 1961.

Ćirić, L. B., *A Generalization of Banach's Contraction Principle*, *Proceedings of The American Mathematical Society 1974*, USA, 1974, 267-273.

Khamsi, M. A., *Quasicontraction Mappings in Modular Spaces without Δ_2-Condition*, Fixed Point Theory and Applications, **916187** (2008).

Kiany, F. dan Amini-Harandi, A., *Fixed Point Theory for Generalized Ćirić Quasi-Contraction Maps in Metrics Spaces*, Fixed Point Theory and Applications, **26** (2013).

Mongkolkeha, C., dkk., *Fixed Point Theorems for Contraction Mappings in Modular Metric Spaces*, Fixed Point Theory and Applications, **93** (2008).

Musielak, J., *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, 1983.

Sastry, K. P. R. dan Naidu, S. V. R., *Fixed Theorems for Generalized Contraction Mappings*, Yokohama Mathematical Journal, **28** (1980), 15-19.