

## PERSAMAAN SUBDIFUSI KONFORMABEL DENGAN PENGARUH KEMOTAKSIS

**Bambang Hendriya Guswanto\***

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman, Indonesia  
bambang.guswanto@unsoed.ac.id

**Muhamad Ichlasul Jihad**

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman, Indonesia

**Dwiky Octa Yuniarto**

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman, Indonesia

**Indra Herdiana**

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman, Indonesia

**ABSTRAK.** Penelitian ini membahas mengenai penurunan persamaan subdifusi-kemotaksis dengan turunan fraksional konformabel dan penyelesaian persamaannya dalam ruang multidimensi. Penurunan persamaan subdifusi-kemotaksis diperoleh dari proses gerak acak waktu kontinu yang dipengaruhi oleh pengaruh eksternal dengan menggunakan turunan fraksional konformabel, transformasi Laplace fraksional, dan menggunakan ukuran peluang pada bola satuan multidimensi- $n$ , yaitu  $S^{n-1}$ . Sementara itu, penyelesaian persamaannya diperoleh dengan menggunakan transformasi Laplace fraksional dan transformasi Fourier multidimensi. Model matematika yang diperoleh menggambarkan pergerakan acak partikel yang bergerak secara subdifusif dan dipengaruhi secara kemotaksis oleh atraksi atraktan. Simulasi numerik dari penyelesaian persamaannya pada kasus satu dan dua dimensi juga menunjukkan fakta bahwa pergerakan partikel dalam subdifusi-kemotaksis konformabel lebih lambat dibandingkan pergerakan partikel dalam difusi-kemotaksis biasa.

**Kata kunci:** subdifusi, kemotaksis, gerak acak, transformasi Laplace fraksional, turunan fraksional konformabel.

**ABSTRACT.** The research discusses the derivation of the conformable fractional subdiffusion-chemotaxis equation and the solution of the equation in multidimensional space. The derivation of the subdiffusion-chemotaxis equation is obtained from a continuous-time random walk process influenced by external factors using conformable fractional derivatives, fractional Laplace transformation, and probability measures on the  $n$ -multidimensional unit sphere  $S^{n-1}$ . Meanwhile, the solution to the equation is obtained using fractional Laplace transformation and multidimensional Fourier transformation. The mathematical model obtained describes the random movement of particles subdiffusing and influenced by chemotaxis attraction. Numerical simulations of the solution in one and two dimensions also indicate that the particle movement in conformable subdiffusion-chemotaxis is slower compared to regular diffusion-chemotaxis.

**Keywords:** subdiffusion, chemotaxis, random walk, fractional Laplace transform, conformable fractional derivative

---

\*Penulis Korespondensi

## 1. PENDAHULUAN

Sel, bakteri, dan banyak mikroorganisme lainnya bergerak secara acak di lingkungannya. Gerakan tersebut disebabkan oleh respons dari mikroorganisme terhadap perubahan konsentrasi di lingkungannya. Respons gerakan mikroorganisme ini disebut taksis (Stevens dan Othmer, 1997).

Ada jenis taksis yang dapat dilakukan oleh mikroorganisme. Salah satunya adalah kemotaksis. Kemotaksis adalah gerakan partikel atau zat yang dipengaruhi oleh gradien konsentrasi suatu zat tertentu menuju konsentrasi yang lebih tinggi atau lebih rendah yang bersifat toksik (lingkungan yang menguntungkan) (Kay dkk., 2008). Dengan kata lain, kemotaksis terjadi melalui proses difusi.

Difusi merupakan perpindahan zat yang disebabkan oleh adanya gerak acak zat dan adanya perbedaan konsentrasi zat (Jørgensen dan Bendoricchio, 2001). Salah satu tipe dari proses difusi adalah subdifusi. Subdifusi merupakan proses difusi lambat. Persamaan difusi biasa tidak dapat menggambarkan proses subdifusi dengan baik. Proses subdifusi ini dapat digambarkan dengan baik menggunakan persamaan difusi yang melibatkan turunan terhadap waktu berorde fraksional di antara nol dan satu yang disebut sebagai persamaan subdifusi.

Difusi anomali merupakan proses difusi yang memiliki karakteristik bahwa rata-rata kuadrat pergeseran atau *mean square displacement* (MSD) dari suatu partikel yang bergerak dalam proses tersebut terhadap waktu  $t > 0$  mengikuti pola

$$\langle x^2(t) \rangle \sim t^\alpha, \alpha > 0, \alpha \neq 1$$

dengan  $\langle x^2(t) \rangle$  adalah MSD pada saat  $t > 0$ . Ketika  $\alpha = 1$ , proses tersebut adalah difusi. Sementara itu, jika  $0 < \alpha < 1$ , maka proses tersebut dinamakan subdifusi atau difusi lambat dan jika  $1 < \alpha < 2$ , maka proses tersebut adalah superdifusi atau difusi cepat (Metzler dan Klafter, 2000).

Artikel ini membahas tentang penurunan dan penyelesaian persamaan subdifusi atau difusi lambat yang dipengaruhi oleh kemotaksis dengan melibatkan turunan fraksional konformabel yang diperkenalkan oleh Khalil, dkk. (2014). Persamaan difusi lambat dengan pengaruh kemotaksis telah diturunkan diantaranya oleh Guswanto (2019), namun turunan fraksional yang digunakan adalah turunan fraksional Caputo. Kelebihan penggunaan turunan fraksional konformabel dalam

persamaan subdifusi dengan kemotaksis diantaranya adalah definisinya yang lebih sederhana dibandingkan dengan definisi turunan fraksional Caputo, sehingga proses penurunan dan penentuan penyelesaian persamaan tersebut menjadi relatif lebih mudah. Simulasi numerik penyelesaian persamaan tersebut juga dilakukan untuk melihat sifat partikel yang terlibat di dalam proses difusi lambat dengan pengaruh kemotaksis tersebut.

## 2. TURUNAN FRAKSIONAL KONFORMABEL

Dalam penelitian Khalil, dkk. (2014), definisi turunan fraksional konformabel didefinisikan sebagai berikut:

**Definisi 2.1.** Diberikan fungsi  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Turunan fraksional konformabel dari  $f$  berorde  $\alpha \in (0,1]$  didefinisikan oleh

$$T_t^\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

untuk  $t > 0$ .

Notasi  $T_t^\alpha f(t)$  dapat ditulis dengan  $f^{(\alpha)}(t)$  yang menyatakan turunan fraksional konformabel dari  $f$  berorde  $\alpha$  di  $t$ . Jika limit pada Definisi 2.1 ada maka fungsi  $f$  dikatakan terdiferensial- $\alpha$  di  $t > 0$  dan diperoleh bahwa

$$T_t^\alpha f(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t).$$

**Definisi 2.2.** Diberikan fungsi  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Integral fraksional konformabel  $I_t^\alpha$  untuk  $f$  dengan  $\alpha > 0$  didefinisikan sebagai

$$I_t^\alpha f(t) = \int_0^t f(\tau) d\alpha(\tau) = \int_0^t \tau^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Jika integral pada Definisi 2.2 ada maka  $f$  dikatakan terintegral- $\alpha$  pada interval  $[0, t]$ . Selanjutnya, merujuk pada penelitian (Abdeljawad, 2015), transformasi Laplace fraksional didefinisikan sebagai berikut:

**Definisi 2.3 (Abdeljawad, 2015).** Diberikan  $0 < \alpha \leq 1$  dan  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi kontinu bagian demi bagian dan terdapat konstanta  $C, M > 0$  sedemikian sehingga  $|f(t)| \leq Me^{C\frac{t^\alpha}{\alpha}}$ . Transformasi Laplace fraksional berorde  $\alpha$  untuk fungsi  $f$  didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}_\alpha\{f(t)\}(s) = \tilde{f}_\alpha(s) = \int_0^\infty e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} t^{\alpha-1} f(t) dt.$$

**Teorema 2.1 (Abdeljawad, 2015).** Jika fungsi  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  terdiferensial- $\alpha$  di  $t > 0$  untuk  $0 < \alpha \leq 1$  maka

$$\mathcal{L}_\alpha\{T_t^\alpha f(t)\}(s) = s\tilde{f}_\alpha(s) - f(0).$$

Transformasi Laplace fraksional dari integral fraksional konformabel dengan mudah dapat diperoleh sebagaimana dinyatakan dalam Teorema berikut ini.

**Teorema 2.2.** Jika fungsi  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  terintegral- $\alpha$  pada  $(0, t]$  untuk  $0 < \alpha \leq 1$  maka

$$\mathcal{L}_\alpha\{I_t^\alpha f(t)\}(s) = \frac{\tilde{f}_\alpha(s)}{s}.$$

Selanjutnya, diberikan definisi konvolusi- $\alpha$  antara dua fungsi sebagai berikut.

**Definisi 2.4.** Jika  $f, g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi-fungsi yang kontinu bagian demi bagian pada  $[0, \infty)$  maka konvolusi- $\alpha$  untuk  $f$  dan  $g$  yang dinotasikan dengan  $(f *_\alpha g)(t)$  didefinisikan sebagai

$$(f *_\alpha g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\alpha(\tau) = \int_0^t \tau^{\alpha-1} f((t^\alpha - \tau^\alpha)^{1/\alpha}) g(\tau) d\tau.$$

Dengan mudah, transformasi Laplace fraksional dari konvolusi- $\alpha$  antara dua fungsi dapat diperoleh sebagai berikut.

**Teorema 2.3.** Jika  $f, g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi-fungsi yang kontinu bagian demi bagian pada  $[0, \infty)$  maka

$$\mathcal{L}_\alpha\{(f *_\alpha g)(t)\}(s) = \tilde{f}_\alpha(s) \tilde{g}_\alpha(s).$$

Kemudia, dengan menggunakan transformasi Laplace fraksional dapat diperoleh penyelesaian masalah nilai awal persamaan diferensial yang melibatkan turunan fraksional konformabel berikut ini.

**Teorema 2.4.** Misalkan  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Penyelesaian masalah nilai awal

$$T_t^\alpha f(t) = \lambda f(t), \quad t > 0$$

dengan  $f(0) = f_0$  adalah

$$f(t) = f_0 e^{\lambda \frac{t^\alpha}{\alpha}}.$$

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Merujuk pada Guswanto, dkk (2025), misalkan suatu partikel di  $\mathbb{R}^n$  mengalami serangkaian lompatan acak. Proses lompatan acak partikel ini dipengaruhi oleh waktu tunggu terjadinya suatu lompatan dan arah lompatan. Misalkan  $\phi(t)$ ,  $t > 0$  sebagai fungsi kerapatan peluang atau *probability density function* (PDF) waktu tunggu terjadinya suatu lompatan setelah waktu  $t$  dan  $T(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega})$  sebagai PDF dari partikel melompat dari posisi  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  pada arah  $\boldsymbol{\omega} \in S^{n-1}$  dengan  $S^{n-1} = \{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n: |\boldsymbol{\omega}| = 1\}$ . Masing-masing PDF tersebut memenuhi hukum total peluang, yaitu

$$\int_0^\infty \phi(t) d\alpha(t) = 1$$

dan

$$\int_{S^{n-1}} T(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} = 1.$$

Kemudian, panjang lompatan suatu partikel diasumsikan konstan sebesar  $\Delta \mathbf{x}$ . Jika  $Q_k(\mathbf{x}; t)$  merupakan peluang bersyarat suatu partikel mencapai posisi  $\mathbf{x}$  pada saat  $t$  setelah  $k$  lompatan maka

$$Q_k(\mathbf{x}; t) = \int_0^t \int_{S^{n-1}} \phi(t - \tau) T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega} \Delta \mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) Q_{k-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega} \Delta \mathbf{x}, \tau) d\boldsymbol{\omega} d\alpha(\tau).$$

Oleh karena itu, PDF dari partikel yang mencapai posisi  $\mathbf{x}$  pada saat  $t$ , yaitu

$$Q(\mathbf{x}, t) = Q_0(\mathbf{x}; t) + \int_0^t \int_{S^{n-1}} \phi(t - \tau) T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega} \Delta \mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) Q(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega} \Delta \mathbf{x}, \tau) d\boldsymbol{\omega} d\alpha(\tau)$$

Diketahui bahwa  $Q_0(\mathbf{x}; t)$  adalah fungsi delta Dirac, maka

$$Q_0(\mathbf{x}; t) = \delta(\mathbf{x}) \delta(t)$$

sehingga

$$Q(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})\delta(t) + \int_0^t \int_{S^{n-1}} \phi(t - \tau) T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) Q(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x}, \tau) d\boldsymbol{\omega} d\alpha(\tau). \quad (1)$$

Selanjutnya, dimisalkan bahwa  $q(\mathbf{x}, t)$  merupakan peluang partikel berada pada posisi  $\mathbf{x}$  dan pada saat  $t$  dengan posisi awal  $\mathbf{x} = 0$  dan  $t = 0$ . Akibatnya,

$$q(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \Phi(t, \tau; \mathbf{x}) Q(\mathbf{x}, \tau) d\alpha(\tau) \quad (2)$$

dengan  $\Phi(t, \tau; \mathbf{x})$  merupakan PDF partikel mencapai posisi  $\mathbf{x}$  pada saat  $\tau < t$  dan tidak melompat pada interval waktu  $(\tau, t)$ . Jika diasumsikan  $\Phi(t, \tau; \mathbf{x}) = \Phi(t - \tau)$ , maka

$$\Phi(t) = 1 - \int_0^t \phi(\tau) d\alpha(\tau) \quad (3)$$

yang berarti bahwa partikel tidak melompat dalam interval waktu  $(0, t)$ . Oleh karena itu, persamaan (1) menjadi

$$q(\mathbf{x}, t) = \left( 1 - \int_0^t \phi(\tau) d\alpha(\tau) \right) \delta(\mathbf{x}) + \int_0^t \int_{S^{n-1}} \phi(t - \tau) T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) q(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x}, \tau) d\boldsymbol{\omega} d\alpha(\tau). \quad (4)$$

Jika persamaan (4) ditransformasikan Laplace fraksional dan kemudian disederhanakan, maka diperoleh bahwa

$$s\tilde{q}_\alpha(\mathbf{x}, s) - \delta(\mathbf{x}) = s\tilde{H}_\alpha(s)(A_\alpha(\mathbf{x}, s) - \tilde{q}_\alpha(\mathbf{x}, s)). \quad (5)$$

dengan

$$\tilde{H}_\alpha(s) = \frac{\tilde{\phi}_\alpha(s)}{1 - \tilde{\phi}_\alpha(s)}$$

dan

$$\int_{S^{n-1}} \tilde{q}_\alpha(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x}, s) T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} = A_\alpha(\mathbf{x}, s),$$

Selanjutnya, diberikan PDF waktu tunggu

$$\phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha} E_{\alpha,1} \left( -\left(\frac{t}{\lambda}\right)^\alpha \right), 0 < \alpha < 1, \lambda > 0 \quad (6)$$

dengan  $E_{\alpha,\beta}(t)$  merupakan fungsi Mittag-Leffler yang didefinisikan sebagai

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \alpha, \beta > 0, z \in \mathbb{C}$$

digunakan oleh Rahayu (2015) untuk menurunkan persamaan subdifusi yang menggunakan turunan fraksional Caputo. Selanjutnya, diberikan fungsi survival dari PDF waktu tunggu (6), yaitu

$$\Phi_{\alpha}(t) = E_{\alpha,1} \left( - \left( \frac{t}{\lambda} \right)^{\alpha} \right) \approx e^{-\frac{t^{\alpha}}{\lambda^{\alpha} \Gamma(1+\alpha)}}, 0 < \alpha < 1, \lambda > 0. \quad (7)$$

yang selanjutnya disebut fungsi *stretched exponential* yang digunakan di dalam (Guswanto, dkk., 2023) untuk menganalisis waktu tunggu pergerakan nilai tukar mata uang Dolar Amerika Serikat terhadap Yen Jepang.

Selanjutnya, dengan menggunakan hasil transformasi Laplace fraksional dari kedua fungsi, yaitu fungsi survival (7) dan  $\phi(t)$ , diperoleh

$$s\tilde{H}_{\alpha}(s) = \frac{1}{\lambda^{\alpha} \Gamma(\alpha)}$$

Akibatnya, persamaan (5) dapat ditulis kembali menjadi

$$s\tilde{q}_{\alpha}(\mathbf{x}, s) - \delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \left( \int_{S^{n-1}} \tilde{q}_{\alpha}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega} \Delta \mathbf{x}, s) T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega} \Delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} - \tilde{q}_{\alpha}(\mathbf{x}, s) \right). \quad (8)$$

Selanjutnya, diasumsikan bahwa  $T(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega})$  bersifat konstan atau tidak bergantung pada posisi  $\mathbf{x}$  dan arah lompatan  $\boldsymbol{\omega}$ . Hal ini bermakna bahwa partikel bergerak secara acak dalam medium homogen atau tidak dipengaruhi oleh pengaruh eksternal. Kemudian, karena

$$\int_{S^{n-1}} T(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} = 1$$

dan

$$\int_{S^{n-1}} d\boldsymbol{\omega} = |S^{n-1}|,$$

maka

$$T(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{|S^{n-1}|}.$$

Akibatnya, persamaan (8) dapat dinyatakan kembali menjadi

$$s\tilde{q}_{\alpha}(\mathbf{x}, s) - \delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} [\tilde{q}_{\alpha}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega} \Delta \mathbf{x}, s) - \tilde{q}_{\alpha}(\mathbf{x}, s)] d\boldsymbol{\omega}. \quad (9)$$

Selanjutnya, diberikan lema berikut ini yang bermanfaat untuk penurunan persamaan subdifusi.

**Lema 3.1 (Senba dan Suzuki, 2010).** *Jika*

$$\int_{S^{n-1}} \omega_i d\omega = 0,$$

$$\int_{S^{n-1}} \omega_i \omega_j d\omega = \delta_{ij} \frac{|S^{n-1}|}{2}, i, j = 1, 2, 3, \dots$$

dengan

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

dan  $f = f(\mathbf{x})$  adalah fungsi yang terdiferensialkan dua kali secara kontinu, maka

$$\int_{S^{n-1}} [f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})] d\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2n} |S^{n-1}| (\Delta\mathbf{x})^2 \Delta f(\mathbf{x}) + o((\Delta\mathbf{x})^2)$$

untuk  $\Delta\mathbf{x} \rightarrow 0$ .

Berdasarkan Lema 3.1 dan karena  $q(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x})$ , persamaan (9) dapat dituliskan kembali menjadi

$$s\tilde{q}_\alpha(\mathbf{x}, s) - q(\mathbf{x}, 0) = \frac{(\Delta\mathbf{x})^2}{2n\lambda^\alpha\Gamma(\alpha)} \Delta \tilde{q}_\alpha(\mathbf{x}, s) + o((\Delta\mathbf{x})^2) \quad (10)$$

untuk  $\Delta\mathbf{x} \rightarrow 0$ . Selanjutnya, invers transformasi Laplace fraksional dari persamaan (11) adalah

$$T_t^\alpha q(\mathbf{x}, t) = \frac{(\Delta\mathbf{x})^2}{2n\lambda^\alpha\Gamma(\alpha)} \Delta q(\mathbf{x}, t) + o((\Delta\mathbf{x})^2) \quad (12)$$

untuk  $\Delta\mathbf{x} \rightarrow 0$  dan  $T_t^\alpha$  merupakan operator turunan konformabel berorde- $\alpha$ .

Jika  $\Delta\mathbf{x} \rightarrow 0$ ,  $\lambda^\alpha \rightarrow 0$ , dan  $\frac{(\Delta\mathbf{x})^2}{\lambda^\alpha}$  dibuat tetap konstan atau berhingga maka persamaan

(12) menjadi

$$T_t^\alpha q(\mathbf{x}, t) = D_\alpha \Delta q(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \quad (13)$$

dengan

$$D_\alpha = \frac{(\Delta\mathbf{x})^2}{2n\lambda^\alpha\Gamma(\alpha)}, n \in \mathbb{N}.$$

Persamaan (13) dinamakan sebagai persamaan subdifusi konformabel multidimensi dan  $D_\alpha$  merupakan koefisien difusivitas.

Misalkan  $T(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega})$  tidak konstan dan memenuhi persamaan-persamaan

$$T(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) - T(\mathbf{x}; -\boldsymbol{\omega}) = F(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}), \quad (14)$$

$$T(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) + T(\mathbf{x}; -\boldsymbol{\omega}) = G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}), \quad (15)$$

dengan  $F(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) \neq 0$ . Hal ini berarti bahwa proses gerak acak dipengaruhi oleh pengaruh eksternal. Untuk kasus  $F(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) = 0$ , kasus ini menggambarkan proses gerak acak partikel yang bergerak pada medium homogen atau partikel tidak dipengaruhi oleh pengaruh eksternal. Akibat dari kondisi normalitas  $T(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega})$ , yaitu

$$\int_{S^{n-1}} T(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} = 1,$$

maka

$$\frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} = 1. \quad (16)$$

Untuk panjang lompatan  $\Delta \mathbf{x} \rightarrow 0$ , dengan menggunakan ekspansi deret Taylor terhadap  $\mathbf{x}$ , dapat diperoleh

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}\Delta \mathbf{x}; -\boldsymbol{\omega})q(\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}\Delta \mathbf{x}, t) &= T(\mathbf{x}; -\boldsymbol{\omega})q(\mathbf{x}, t) + \Delta \mathbf{x}\{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\}T(\mathbf{x}; -\boldsymbol{\omega})q(\mathbf{x}, t) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Delta \mathbf{x})^2\{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\}^2T(\mathbf{x}; -\boldsymbol{\omega})q(\mathbf{x}, t) + o((\Delta \mathbf{x})^2). \end{aligned} \quad (17)$$

Dengan cara yang sama,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta \mathbf{x}; \boldsymbol{\omega})q(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta \mathbf{x}, t) &= T(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega})q(\mathbf{x}, t) - \Delta \mathbf{x}\{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\}T(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega})q(\mathbf{x}, t) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Delta \mathbf{x})^2\{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\}^2T(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega})q(\mathbf{x}, t) + o((\Delta \mathbf{x})^2). \end{aligned} \quad (18)$$

Dengan menggunakan persamaan (14), (15), (17), dan (18), diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}\Delta \mathbf{x}; -\boldsymbol{\omega})q(\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}\Delta \mathbf{x}, t) + T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta \mathbf{x}; \boldsymbol{\omega})q(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta \mathbf{x}, t) &= G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega})q(\mathbf{x}, t) - \Delta \mathbf{x}\{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\}F(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega})q(\mathbf{x}, t) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Delta \mathbf{x})^2\{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\}^2G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega})q(\mathbf{x}, t) + o((\Delta \mathbf{x})^2). \end{aligned} \quad (19)$$

Selanjutnya, misalkan  $F(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega})$  memenuhi kondisi

$$F(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) = \frac{\Delta \mathbf{x}}{|S^{n-1}|} \boldsymbol{\omega} \cdot f(\mathbf{x}) \quad (20)$$

dengan  $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))^T \in \mathbb{R}^n$  merupakan pengaruh eksternal yang memengaruhi lompatan partikel pada posisi  $\mathbf{x}$ . Kemudian,  $f_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, n$  adalah pengaruh eksternal yang memengaruhi lompatan

partikel pada posisi  $\mathbf{x}$  dalam arah sumbu koordinat ke- $i$  dari sistem koordinat berdimensi- $n$ .

Selain itu, diasumsikan pula bahwa  $G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega})$  bersifat konstan, sehingga

$$G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) = \frac{2}{|S^{n-1}|}. \quad (21)$$

Dengan kondisi isotropik

$$\int_{S^{n-1}} \omega_i d\boldsymbol{\omega} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (22)$$

$$\int_{S^{n-1}} \omega_i \omega_j d\boldsymbol{\omega} = \delta_{ij} \frac{|S^{n-1}|}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (23)$$

dengan  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in S^{n-1}$ , dan dengan menggunakan (16), (19), (20), (21), (22), dan (23), maka diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} -q(\mathbf{x}, t) + \int_{S^{n-1}} T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega})q(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x}, t)d\boldsymbol{\omega} \\ = \frac{(\Delta\mathbf{x})^2}{2n} [\Delta q(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot f(\mathbf{x})q(\mathbf{x}, t)] + o((\Delta\mathbf{x})^2). \end{aligned}$$

Oleh karenanya, persamaan (8) menjadi

$$\tilde{q}_\alpha(\mathbf{x}, s) - \delta(\mathbf{x}) = \frac{(\Delta\mathbf{x})^2}{2n\lambda^\alpha\Gamma(\alpha)} [\Delta \tilde{q}_\alpha(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot f(\mathbf{x})\tilde{q}_\alpha(\mathbf{x}, s)] + o((\Delta\mathbf{x})^2). \quad (24)$$

Selanjutnya, invers transformasi Laplace fraksional dari persamaan (24) adalah

$$T_t^\alpha q(\mathbf{x}, t) = \frac{(\Delta\mathbf{x})^2}{2n\lambda^\alpha\Gamma(\alpha)} [\Delta q(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot f(\mathbf{x})q(\mathbf{x}, t)] + o((\Delta\mathbf{x})^2). \quad (25)$$

Jika  $\Delta\mathbf{x} \rightarrow 0$ ,  $\lambda^\alpha \rightarrow 0$ , dan  $\frac{(\Delta\mathbf{x})^2}{\lambda^\alpha}$  dibuat tetap konstan atau berhingga, maka persamaan (25) menjadi

$$T_t^\alpha q(\mathbf{x}, t) = D_\alpha [\Delta q(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot f(\mathbf{x})q(\mathbf{x}, t)], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \quad (26)$$

dengan

$$D_\alpha = \frac{(\Delta\mathbf{x})^2}{2n\lambda^\alpha\Gamma(\alpha)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Persamaan (26) dinamakan sebagai persamaan Fokker-Planck konformabel multidimensi.

Selanjutnya, mengikuti Stevens (2000) untuk kasus multidimensi, peluang lompatan partikel dalam arah  $\boldsymbol{\omega}$  bergantung pada atraktan pada posisi saat ini, yaitu

$$T(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) = \frac{v(\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x})}{\int_{S^{n-1}} v(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x}) d\boldsymbol{\omega}} \quad (27)$$

dan

$$T(\mathbf{x}; -\boldsymbol{\omega}) = \frac{v(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x})}{\int_{S^{n-1}} v(\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x}) d\boldsymbol{\omega}} \quad (28)$$

dengan  $v(\mathbf{x})$  adalah fungsi sensitivitas yang bergantung pada konsentrasi atraktan, yaitu  $c(\mathbf{x})$  pada posisi  $\mathbf{x}$  sehingga

$$v(\mathbf{x}) = e^{\gamma c(\mathbf{x})}.$$

Dengan menggunakan persamaan (15), (27), dan (28), serta diasumsikan bahwa  $G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega})$  bersifat konstan, dapat diperoleh bahwa

$$\int_{S^{n-1}} v(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x}) d\boldsymbol{\omega} = \frac{|S^{n-1}|}{2} [v(\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x}) + v(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x})]. \quad (29)$$

Oleh karenanya, berdasarkan persamaan (14), (27), (28), dan (29), diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) &= T(\mathbf{x}; \boldsymbol{\omega}) - T(\mathbf{x}; -\boldsymbol{\omega}) \\ &= \frac{2}{|S^{n-1}|} \frac{e^{\gamma c(\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x})} - e^{\gamma c(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x})}}{e^{\gamma c(\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x})} + e^{\gamma c(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\Delta\mathbf{x})}} \\ &\approx \frac{2}{|S^{n-1}|} \frac{e^{\gamma\Delta\mathbf{x}\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla c(\mathbf{x})} - e^{-\gamma\Delta\mathbf{x}\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla c(\mathbf{x})}}{e^{\gamma\Delta\mathbf{x}\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla c(\mathbf{x})} + e^{-\gamma\Delta\mathbf{x}\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla c(\mathbf{x})}} \\ &= \frac{2}{|S^{n-1}|} \tanh(\gamma\Delta\mathbf{x}\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla c(\mathbf{x})). \\ &\approx \frac{2}{|S^{n-1}|} \gamma\Delta\mathbf{x}\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla c(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

sehingga

$$\frac{\Delta\mathbf{x}}{|S^{n-1}|} \boldsymbol{\omega} \cdot f(\mathbf{x}) \approx \frac{\Delta\mathbf{x}}{|S^{n-1}|} \boldsymbol{\omega} \cdot 2\gamma\nabla c(\mathbf{x}). \quad (30)$$

Berdasarkan kesamaan kedua ruas pada persamaan (30), diperoleh bahwa

$$f(\mathbf{x}) \approx 2\gamma\nabla c(\mathbf{x}).$$

Akibatnya, persamaan (26) dapat dituliskan kembali menjadi

$$T_t^\alpha q(\mathbf{x}, t) \approx D_\alpha \Delta q(\mathbf{x}, t) - \frac{\gamma(\Delta\mathbf{x})^2}{n\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)} \nabla \cdot q(\mathbf{x}, t) \nabla c(\mathbf{x}). \quad (31)$$

Jika  $\Delta\mathbf{x} \rightarrow 0$ ,  $\lambda^\alpha \rightarrow 0$ , dan  $\frac{(\Delta\mathbf{x})^2}{\lambda^\alpha}$  dibuat tetap konstan atau berhingga maka persamaan (31) menjadi

$$T_t^\alpha q(\mathbf{x}, t) = D_\alpha \Delta q(\mathbf{x}, t) - \chi_\alpha \nabla \cdot q(\mathbf{x}, t) \nabla c(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \quad (32)$$

dengan

$$D_\alpha = \frac{(\Delta \mathbf{x})^2}{2n\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)}, \chi_\alpha = \frac{\gamma(\Delta \mathbf{x})^2}{n\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)}, n \in \mathbb{N}.$$

Persamaan (32) dinamakan sebagai persamaan subdifusi-kemotaksis konformabel multidimensi dengan  $\chi_\alpha$  merupakan koefisien kemotaksis.

Persamaan subdifusi-kemotaksis konformabel multidimensi yang telah diperoleh sebagaimana pada persamaan (32), yaitu

$$T_t^\alpha q(\mathbf{x}, t) = D_\alpha \Delta q(\mathbf{x}, t) - \chi_\alpha \nabla \cdot q(\mathbf{x}, t) \nabla c(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

dapat dicari penyelesaian persamaannya dengan menerapkan transformasi Fourier multidimensi dan transformasi Laplace fraksional.

Misalkan konsentrasi atraktan  $c(\mathbf{x})$  pada posisi  $\mathbf{x}$  memenuhi kondisi

$$c(\mathbf{x}) = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n + b$$

dengan  $b, v_i$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  merupakan suatu skalar bilangan riil, maka diperoleh gradien konsentrasi atraktan, yaitu

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T.$$

Dengan menggunakan transformasi Fourier dari turunan fungsi pada persamaan (32), dapat diperoleh bahwa

$$T_t^\alpha \hat{q}(\mathbf{k}, t) = (-D_\alpha |\mathbf{k}|^2 + \chi_\alpha i \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \hat{q}(\mathbf{k}, t). \quad (33)$$

Selanjutnya, dengan kondisi awal  $\hat{q}_0 = \hat{q}(\mathbf{k}, 0) = 1$ , persamaan (33) dapat diselesaikan dengan menggunakan transformasi Laplace fraksional dan inversnya maka berdasarkan Teorema 2.4 diperoleh bahwa

$$\hat{q}(\mathbf{k}, t) = \exp \left\{ (-D_\alpha |\mathbf{k}|^2 + \chi_\alpha i \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \frac{t^\alpha}{\alpha} \right\}. \quad (34)$$

Jika persamaan (34) diinvers transformasi Fourier, maka diperoleh untuk  $t > 0$ ,

$$q(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2^n \sqrt{\pi^n}} \sqrt{\left( \frac{\alpha}{D_\alpha t^\alpha} \right)^n} \exp \left\{ -\frac{\alpha}{4D_\alpha t^\alpha} \left| \mathbf{x} - \frac{t^\alpha}{\alpha} \chi_\alpha \mathbf{v} \right|^2 \right\}, \quad (35)$$

yang merupakan penyelesaian persamaan subdifusi-kemotaksis konformabel multidimensi.

Selanjutnya, akan dibahas simulasi numerik dari penyelesaian persamaan subdifusi-kemotaksis konformabel multidimensi untuk ruang satu dan dua dimensi.

Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan beberapa nilai  $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ .

Untuk ruang satu dimensi, penyelesaian persamaan subdifusi-kemotaksis konformabel multidimensi menjadi

$$q(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\alpha}{D_\alpha t^\alpha}} \exp \left\{ -\frac{\alpha}{4D_\alpha t^\alpha} \left( x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \chi_\alpha v \right)^2 \right\}$$

dengan  $x, v \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1, t > 0$ , dan

$$D_\alpha = \frac{(\Delta x)^2}{2n\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)}, \chi_\alpha = \frac{\gamma(\Delta x)^2}{n\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)}.$$

Selanjutnya, misalkan konsentrasi atraktan memenuhi kondisi

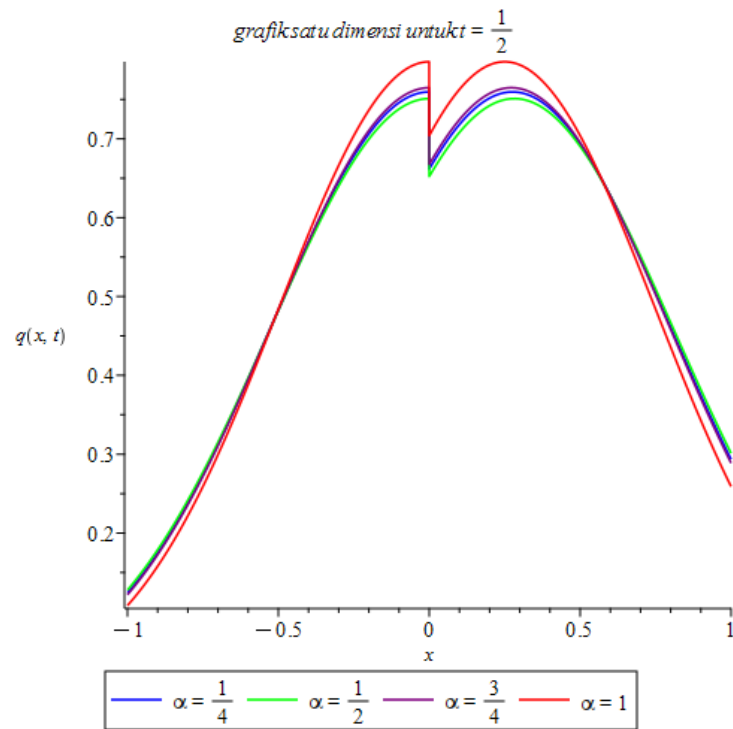
$$c(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x, & x > 0, \end{cases}$$

maka gradien konsentrasi dari  $c(x)$  adalah

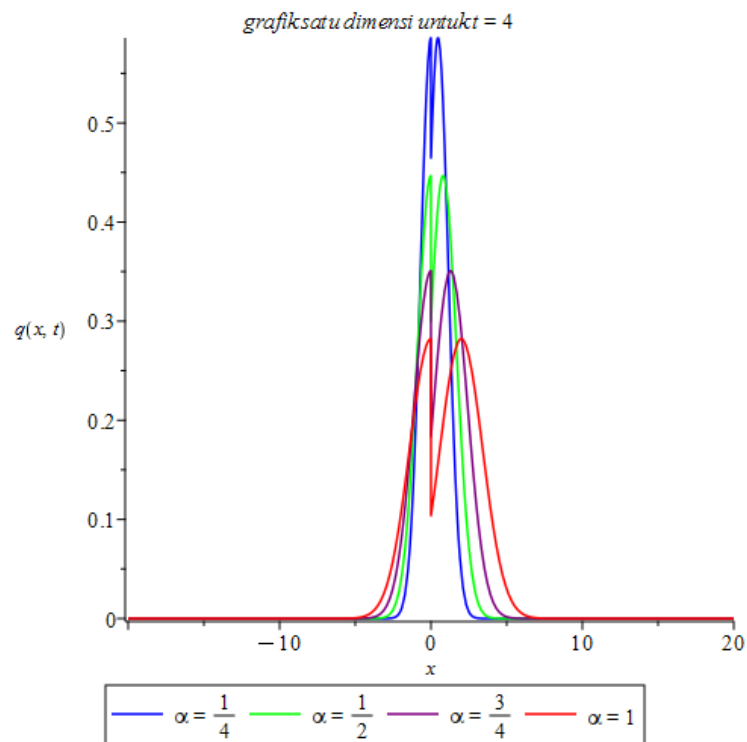
$$v = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0. \end{cases}$$

Di  $x = 0$ , gradien konsentrasi atraktan diasumsikan bernilai nol. Hal tersebut mengandung arti bahwa konsentrasi atraktan bernilai nol di posisi  $x = 0$ .

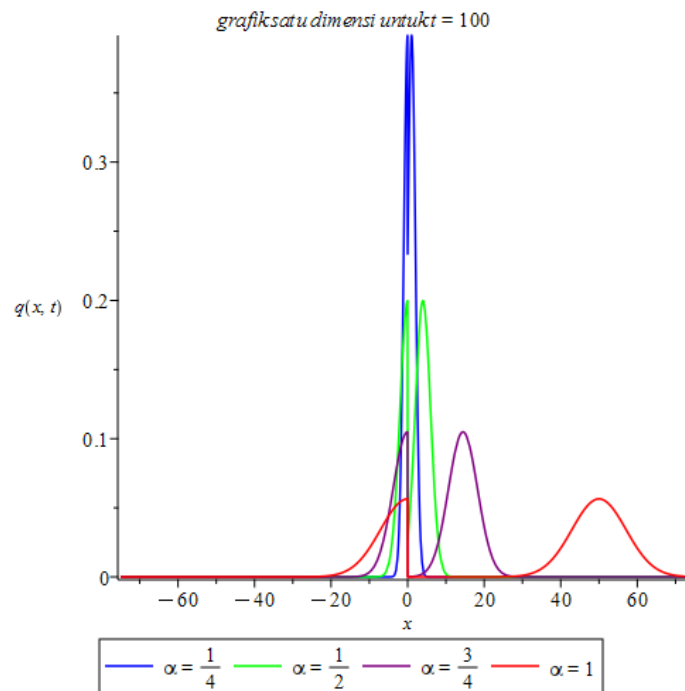
Dengan menggunakan  $\Delta x = 0,5$ ,  $\lambda = 0,5$ , dan  $\gamma = 0,5$ , grafik-grafik satu dimensi berikut merupakan hasil simulasi numerik dari penyelesaian persamaan subdifusi-kemotaksis konformabel untuk  $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$  pada waktu  $t = \frac{1}{2}, 4, 100$  yang disajikan pada Gambar 3.1 hingga Gambar 3.3.



**Gambar 3.1** Grafik fungsi satu dimensi untuk  $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$  ketika  $t = \frac{1}{2}$

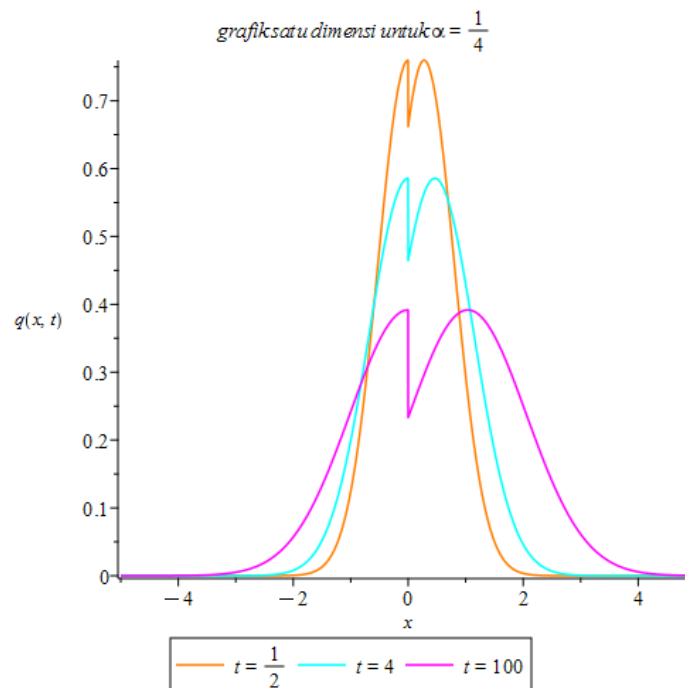


**Gambar 3.2** Grafik fungsi satu dimensi untuk  $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$  ketika  $t = 4$

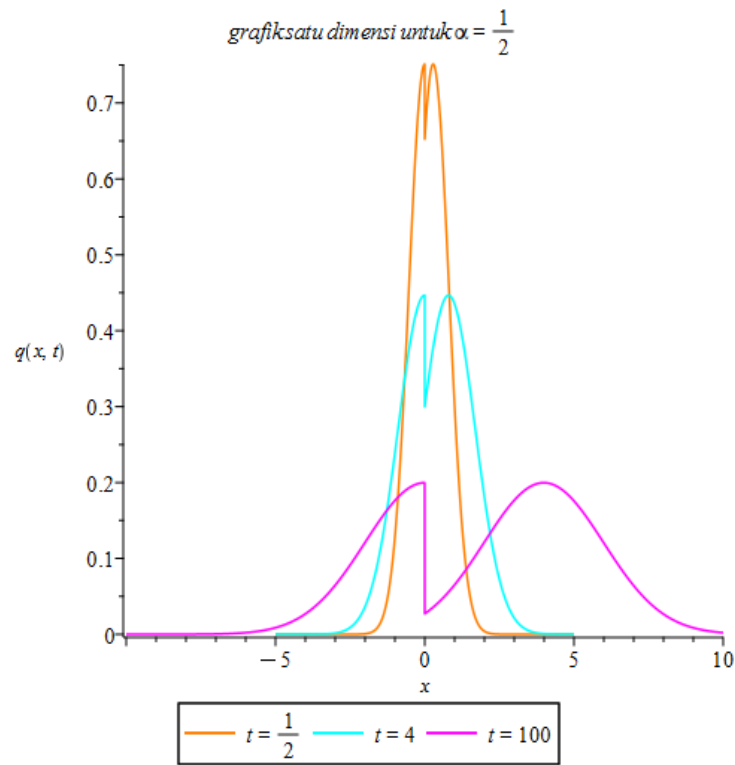


**Gambar 3.3** Grafik fungsi satu dimensi untuk  $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$  ketika  $t = 100$

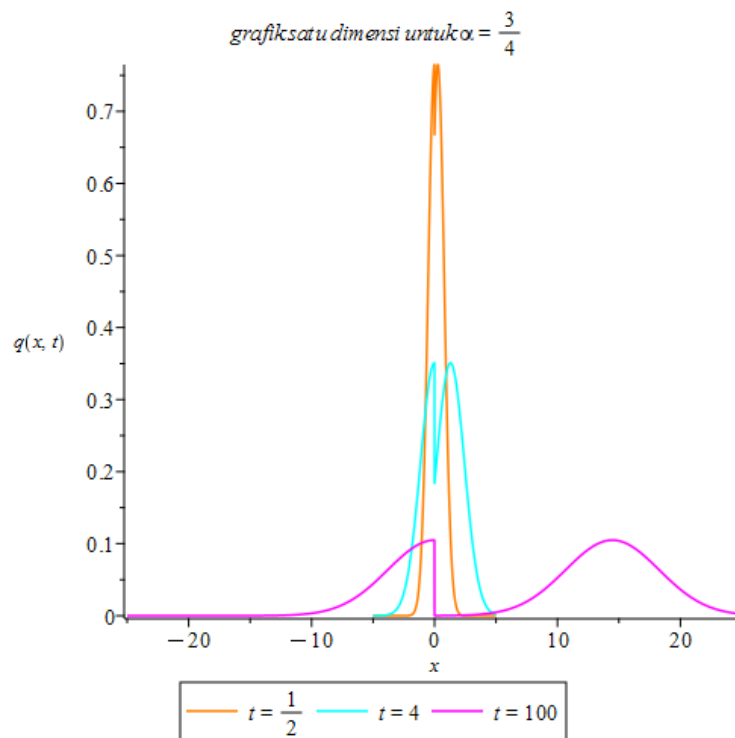
Kemudian, Gambar 3.4 hingga Gambar 3.7 merupakan hasil simulasi numerik satu dimensi dari penyelesaian persamaan subdifusi-kemotaksis konformabel untuk  $t = \frac{1}{2}, 4, 100$  ketika diberikan nilai  $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ .



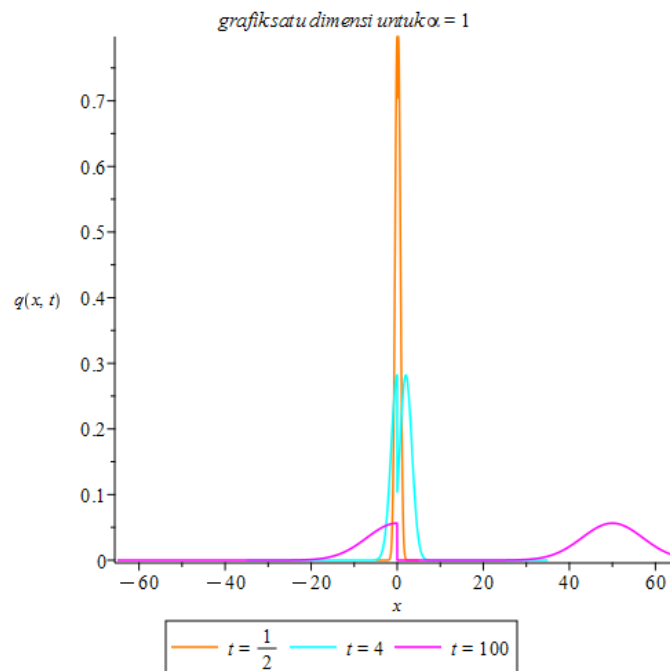
**Gambar 3.4** Grafik fungsi satu dimensi untuk  $\alpha = \frac{1}{4}$  ketika  $t = \frac{1}{2}, 4, 100$



**Gambar 3.5** Grafik fungsi satu dimensi untuk  $\alpha = \frac{1}{2}$  ketika  $t = \frac{1}{2}, 4, 100$



**Gambar 3.6** Grafik fungsi satu dimensi untuk  $\alpha = \frac{3}{4}$  ketika  $t = \frac{1}{2}, 4, 100$



**Gambar 3.7** Grafik fungsi satu dimensi untuk  $\alpha = 1$  ketika  $t = \frac{1}{2}, 4, 100$

Visualisasi pada Gambar 3.1 hingga Gambar 3.3 menunjukkan bahwa semakin kecil nilai  $\alpha$ , maka nilai  $q(x, t)$  semakin besar untuk  $|x|$  yang cukup besar. Sementara itu, nilai  $q(x, t)$  semakin kecil untuk  $|x|$  yang cukup kecil. Hal ini bermakna bahwa pergerakan partikel semakin lambat ketika nilai  $\alpha$  semakin kecil. Dengan demikian, visualisasi tersebut sesuai dengan fenomena subdifusi. Kemudian, Gambar 3.4 hingga Gambar 3.7 menunjukkan bahwa semakin besar nilai  $t$ , maka nilai  $q(x, t)$  semakin kecil. Hal tersebut sesuai dengan karakter grafik persamaan difusi, yaitu nilai  $q(x, t)$  akan terus mengecil hingga stabil ke titik 0 ketika nilai  $t \rightarrow \infty$ .

Selain itu, Gambar 3.4 hingga Gambar 3.7 juga menunjukkan bahwa pada daerah  $x > 0$  yang memiliki gradien konsentrasi atraktan  $v = 2$ , grafik  $q(x, t)$  bergeser searah dengan  $v$  seiring bertambahnya nilai  $t$ . Hal ini sesuai dengan fenomena difusi-kemotaksis, yaitu partikel cenderung bergerak menuju atraktan pada daerah  $x > 0$ . Di sisi lain, pada daerah  $x \leq 0$  yang tidak memiliki gradien konsentrasi atraktan atau  $v = 0$ , terlihat bahwa grafik  $q(x, t)$  relatif tidak bergeser atau berada di sekitar titik  $x = 0$ . Hal ini sesuai dengan karakter grafik persamaan difusi yang tidak dipengaruhi oleh pengaruh eksternal.

#### 4. KESIMPULAN DAN SARAN

Turunan fraksional konformabel dapat digunakan sebagai alternatif turunan fraksional klasik seperti turunan fraksional Caputo atau Riemann-Liouville untuk memodelkan fenomena subdifusi dengan pengaruh kemotaksis. Definisi turunan fraksional konformabel yang lebih sederhana menjadikan penyelesaian-penyelesaian model matematika yang melibatkan turunan fraksional konformabel menjadi lebih mudah secara analitik maupun numerik.

Pengaruh kemotaksis yang lebih kompleks daripada pengaruh kemotaksis yang digunakan di dalam penelitian menjadi penelitian lanjutan yang sangat menarik baik secara analitik maupun numerik. Selain itu, penambahan pengaruh eksternal lain selain pengaruh kemotaksis menjadi penelitian lanjutan lain yang sangat menarik untuk dikaji.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Abdeljawad, T., *On Conformable Fractional Calculus*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **279** (2015), 57–66.
- Guswanto, B. H., *A Multidimensional Subdiffusion Model with Chemotaxis*. Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP), **11**(2) (2019), 1–10.
- Guswanto, B. H., Pratama, M. R., Prabowo, A., Jajang, J., dan Sihwaningrum, I., *Fractional Derivative and Financial Instruments: Waiting Time Distributions for The Exchange Rate Movement of US Dollar to Japanese Yen*, Progress in Fractional Differentiation and Applications, **9**(2) (2023), 319–330.
- Jørgensen, S. E. dan Bendoricchio, G., *Fundamentals of Ecological Modelling* (Vol. 21). Elsevier, 2021.
- Kay, R. R., Langridge, P., Traynor, D., dan Hoeller, O., *Changing Directions in The Study of Chemotaxis*, Nature Reviews Molecular Cell Biology, **9**(6) (2008), 455–463.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., dan Sababheh, M., *A New Definition of Fractional Derivative*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **264** (2014), 65–70.
- Metzler, R. dan Klafter, J., *Accelerating Brownian Motion: A Fractional Dynamics Approach to Fast Diffusion*, Europhysics Letters, **51**(5) (2000), 492.

- Rahayu, S. T., *Kajian Model Fraksional Proses Difusi*, Skripsi Sarjana, Universitas Jenderal Soedirman, 2021.
- Senba, T. dan Suzuki, T., *Applied Analysis: Mathematical Methods in Natural Science*, Imperial College Press, 2020.
- Stevens, A. dan Othmer, H. G., *Aggregation, Blowup, and Collapse: The ABC's of Taxis in Reinforced Random Walks*, SIAM Journal on Applied Mathematics, **57**(4) (1997), 1044–1081.
- Guswanto, B. H., Marfungah, A., Yuniarto, D. O., Jihad, M. I., Mashuri, Maryani, S., dan Istikaanah, N. I., *From Continuous Random Walks to Multidimensional Conformable Diffusion Equation*, IAENG International Journal of Applied Mathematics, **54**(7) (2025), 1445-1458.
- Stevens, A., *A Stochastic Cellular Automation Modeling Gliding and Agregation of Myxobacteria*, SIAM J. Appl. Math., **61**(1) (2000), 172-182

