Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP)
Vol. 11 No. 1, Juni 2019, hal. 11-20
ISSN (Cetak) : 2085-1456; ISSN (*Online*) : 2550-0422

KARAKTERISTIK SEGITIGA LUCAS

Siti Rahmah Nurshiami
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jenderal Soedirman
Email: rahmahnurshiami@gmail.com

Ari Wardayani
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jenderal Soedirman
Email: ariwardayani@yahoo.co.id

Kana Hasmi Setiani
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jenderal Soedirman

ABSTRACT. *Lucas triangle is an array of coeficients of a polynomial forming a pattern which is similar to Pascal triangle. This research studies Lucas triangle and its properties. The research results show that every row in Lucas triangle is begun by the number 1 and is ended by the number 2, the sum of the first n terms of number of 1th column is equal to the number at $(n+1)^{th}$ row, 2nd column. Besides, the number at nth row and $(n-2)^{th}$ column of Lucas triangle is* $(n-1)^2$ for $n \geq 2$, *the sum of the first n terms of number of jth column is equal to the number at $(n+1)^{th}$ row, $(j+1)^{th}$ column for j ≥ 1. The number of Lucas triangle is the sum of two number terms in preceded row, that is the number at $(n-1)^{th}$ row, $(j-1)^{th}$ and the number at $(n-1)^{th}$ row, j^{th}. Then, the sum of coefficients of each n^{th} row of Lucas triangle is* $3 \cdot 2^{n-1}$.

Keywords **:** *Pascal triangle, Lucas number, Lucas triangle*.

ABSTRAK. Segitiga Lucas merupakan susunan koefisien-koefisien dari suatu polinomial yang disusun membentuk pola segitiga memyerupai segitiga Pascal. Penelitian ini mengkaji segitiga Lucas dan karakteristik dari segitiga Lucas. Hasil penelitian menunjukkan bahwa, setiap baris pada segitiga Lucas diawali dengan angka 1 dan diakhiri dengan angka 2, jumlah dari *n* suku bilangan pertama pada kolom ke-1 sama dengan bilangan pada baris ke-$(n+1)$ kolom ke-2. Selain itu, bilangan pada baris ke-n kolom ke-$(n-2)$ pada segitiga Lucas adalah $(n-1)^2$ untuk $n \geq 2$, jumlah *n* suku bilangan pertama pada kolom ke-*j* sama dengan bilangan pada baris ke-$(n+1)$ kolom ke-$(j+1)$ untuk $j \geq 1$. Bilangan pada segitiga Lucas merupakan penjumlahan dari dua suku bilangan pada baris sebelumnya, yaitu bilangan pada baris ke-$(n-1)$ kolom ke-$(j-1)$ dan bilangan pada baris ke-$(n-1)$ kolom ke-*j*. Kemudian, jumlah koefisien setiap baris ke-*n* pada segitiga Lucas adalah $3 \cdot 2^{n-1}$.

Kata Kunci : Segitiga Pascal, Bilangan Lucas, Segitiga Lucas

1. PENDAHULUAN

Bilangan Lucas ke-n atau L_n didefinisikan secara relasi rekuren dari penjumlahan dua buah bilangan Lucas ke-$(n-1)$ dan bilangan Lucas ke-$(n-2)$ atau $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, dengan $L_0 = 2,\ L_1 = 1,\ n \geq 2$. Bilangan Lucas memiliki relasi yang sama dengan bilangan Fibonacci. Perbandingan dua bilangan Fibonacci yaitu antara F_{n+1} dengan F_n hampir selalu sama mendekati 1,61803339887 atau disebut *golden ratio*. Begitu pula pada bilangan Lucas, perbandingan dua bilangan antara L_{n+1} dengan L_n juga hampir selalu sama dan mendekati *golden ratio*. Bilangan Lucas ke-*n* dapat diperoleh dari pembulatan *golden ratio* yang dipangkatkan *n* dengan $n \geq 2$.

Bilangan Fibonacci dapat ditemukan dengan menjumlahkan setiap diagonal pada segitiga Pascal. Segitiga Pascal merupakan pola bilangan yang tersusun membentuk sebuah segitiga, dan bilangan-bilangan tersebut dinamakan koefisien binomial. Karena bilangan Lucas memiliki relasi rekuren yang sama dengan bilangan Fibonacci, Mark Feinberg pada tahun 1967 mempelajari tentang koefisien pada ekspansi suatu polinomial. Koefisien-koefisien tersebut disusun membentuk pola segitiga seperti pola segitiga Pascal, yang dikenal dengan Segitiga Lucas. Segitiga Pascal memiliki sifat simetris yaitu bagian kanan dan kirinya memiliki nilai yang sama. Selain itu, Jumlah bilangan pada setiap baris di segitiga Pascal habis dibagi 2. Berdasarkan hal tersebut, penelitian ini mengkaji tentang segitiga Lucas dan karakteristik dari segitiga Lucas.

2. Segitiga Lucas

Misal diberikan polinomial sebagai berikut

$$f_n(x,y) = (x+y)^{n-1}(x+2y) \text{ untuk } n \geq 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \ (1)$$

Enam ekspansi pertama dari polinomial (1) adalah:

$$f_1(x,y) = x + 2y$$
$$f_2(x,y) = x^2 + 3xy + 2y^2$$
$$f_3(x,y) = x^3 + 4x^2y + 5xy^2 + 2y^3$$
$$f_4(x,y) = x^4 + 5x^3y + 9x^2y^2 + 7xy^3 + 2y^4$$
$$f_5(x,y) = x^5 + 6x^4y + 14x^3y^2 + 16x^2y^3 + 9xy^4 + 2y^5$$
$$f_6(x,y) = x^6 + 7x^5y + 20x^4y^2 + 30x^3y^3 + 25x^2y^4 + 11xy^5 + 2y^6$$

.... (2)

Misalkan $A(n,j)$ merupakan koefisien dari $x^{n-j}y^j$ pada fungsi $f_n(x,y) = (x+y)^{n-1}(x+2y)$. Sebagai contoh, dengan $n=5$ dan $j=3$, $A(5,3)$ merupakan koefisien dari $x^{5-3}y^3 = x^2y^3$ pada fungsi $f_5(x,y)$. Berdasarkan persamaan (2) diperoleh $A(5,3)=16$. Koefisien-koefisien dari polinomial tersebut dapat disusun dalam bentuk sebuah segitiga, seperti terlihat pada Gambar 1.

n \ j	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2					
2	1	3	2				
3	1	4	5	2			
4	1	5	9	7	2		
5	1	6	14	16	9	2	
6	1	7	20	30	25	11	2

Gambar 1. Segitiga Lucas

Pada Gambar 1, pembentukan segitiga Lucas diperoleh dengan cara menuliskan koefisien-koefisien hasil ekspansi polinomial (1) untuk 1 ≤ n ≤ 6. Penentuan koefisien hasil ekspansi untuk n yang sangat besar akan sulit didapatkan apabila dilakukan secara manual. Oleh karena itu diperlukan suatu rumusan untuk menentukan koefisien dengan melihat pola bilangan.

3. Hasil dan Pembahasan

Penentuan koefisien-koefisien pada ekspansi polinomial $f_n(x,y)=(x+y)^{n-1}(x+2y)$ untuk n yang sangat kecil dapat dilakukan dengan menjabarkan perkalian dua buah persamaan. Namun untuk n yang cukup besar, akan memerlukan waktu yang tidak singkat. Berdasarkan hal ini perlu suatu rumusan dalam penentuan koefisien dengan menggunakan Teorema Binomial, seperti tertuang dalam proposisi berikut.

Proposisi 1

Jika $f_n(x,y)=(x+y)^{n-1}(x+2y)$ *untuk setiap* $n\geq 1$, *maka* $A(n,j)$ *koefisien dari* $x^{n-j}y^j$ *dari fungsi* $f_n(x,y)$ *adalah*

$$A(n,j)=\begin{cases} 1 & , \ j=0 \\ \binom{n}{j}+\binom{n-1}{j-1} & , \ j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1 \\ 2 & , \ j=n \end{cases}$$

Bukti :

Karena $(x+y)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j$, sehingga fungsi polinomial $f_n(x,y)$ dapat ditulis menjadi

$$f_n(x,y)=\left[\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{n-1-j}y^j\right](x+2y)$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{n-j}y^j+2\left[\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{n-1-j}y^{j+1}\right]$$

$$= \left[\binom{n-1}{0} + 0\right] x^n y^0 + \left[\binom{n-1}{1} + 2\binom{n-1}{0}\right] x^{n-1} y^1 + \cdots +$$

$$\left[\binom{n-1}{n-1} + 2\binom{n-1}{n-2}\right] x^1 y^{n-1} + \left[0 + 2\binom{n-1}{n-1}\right] x^0 y^n$$

$$= x^n + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{j} + 2\binom{n-1}{j-1}\right] x^{n-j} y^j + 2y^n$$

$$= x^n + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\binom{n}{j} + \binom{n-1}{j-1}\right] x^{n-j} y^j + 2y^n$$

karena untuk setiap koefisien x^n pada $f_n(x,y)$ adalah 1, hal ini berarti $A(n,0)=1$. Koefisien y^n pada $f_n(x,y)$ adalah 2 atau dengan kata lain $A(n,n)=2$. Koefisien dari $x^{n-j}y^j$ adalah $\binom{n}{j}+\binom{n-1}{j-1}$ yang dinotasikan sebagai $A(n,j)$, dengan $n \geq 1$, dan $1 \leq j \leq n-1$.

■

Proposisi 2

Misalkan $A(n,j)$ *merupakan koefisien dari* $x^{n-j}y^j$ *pada ekspansi polinomial* $f_n(x,y)=(x+y)^{n-1}(x+2y)$, *maka:*

(i) $A(n,n-2)=(n-1)^2$, *untuk* $n \geq 2$

(ii) $\sum_{k=1}^{n} A(k,1) = A(n+1,2)$ *,untuk* $n \geq 1,\ j \geq 1$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} A(k,j) = A(n+1,j+1)$, *untuk* $n \geq 1,\ j \geq 1$

Bukti

Berdasarkan Proposisi 1 dan definisi koefisien Binomial, diperoleh

$$A(n,n-2) = \binom{n}{n-2} + \binom{n-1}{n-3}$$

$$= \frac{(n-1)(2n-2)}{2} = (n-1)^2.$$

Kemudian (i) dan (iii) dapat dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.

■

Proposisi 3

Jika $f_n(x,y)=(x+y)^{n-1}(x+2y)$ *untuk setiap* $n\geq 1$, *dan* $A(n,j)$ *koefisien dari* $x^{n-j}y^j$ *dari fungsi* $f_n(x,y)$ *dengan* $A(n,0)=1$, $A(n,n)=2$ *maka* $A(n,j)$ *dapat dituliskan secara rekursif adalah* $A(n,j)=A(n-1,j-1)+A(n-1,j)$, $\forall n>1, j\geq 1$.

Bukti

Berdasarkan proposisi 1 untuk $n>1$ dan $j\geq 1$,

$$A(n,j)=\binom{n}{j}+\binom{n-1}{j-1}$$

Karena $\binom{n}{j}=\binom{n-1}{j-1}+\binom{n-1}{j}$, sehingga

$$A(n,j)=\binom{n-1}{j-1}+\binom{n-1}{j}+\binom{(n-1)-1}{(j-1)-1}+\binom{(n-1)-1}{j-1}$$

$$=\binom{n-1}{j-1}+\binom{n-2}{j-2}+\binom{n-1}{j}+\binom{n-2}{j-1}$$

$$=A(n-1,j-1)+A(n-1,j)$$

■

Proposisi 1 sampai dengan proposisi 3 mengkaji tentang penentuan koefisien dari $x^{n-j}y^j$ pada fungsi $f_n(x,y)$. Selanjutnya akan dilihat pola dari penjumlahan koefisien-koefisien pada setiap baris segitiga Lucas. Perhatikan bahwa, dengan memilih $x=1$ dan $y=1$ pada persamaan (1), sehingga diperoleh

$$f_n(1,1)=(2)^{n-1}.3$$

Hal ini menunjukkan bahwa jumlah koefisien setiap baris pada segitiga Lucas adalah 3.2^{n-1}, seperti tertuang pada proposisi berikut.

Proposisi 4

Untuk setiap $n \geq 1$ *dan* $j \geq 1$ *berlaku* $f_n(1,1) = \sum_{j=0}^{n} A(n,j) = 3 \cdot 2^{n-1}$

Bukti

Misal $P(n)$ pernyataan $f_n(1,1) = \sum_{j=0}^{n} A(n,j) = 3 \cdot 2^{n-1}$.

a. Langkah basis

Untuk $n = 1$ maka $P(1): \sum_{j=0}^{1} A(1,j) = A(1,0) + A(1,1) = 1 + 2 = 3 \cdot 2^0 = 3 \cdot 2^{1-1}$

Sehingga $P(1)$ bernilai benar.

b. Langkah induksi

Asumsikan $P(m)$ benar, artinya $\sum_{j=0}^{m} A(m,j) = 3 \cdot 2^{m-1}$. Akan ditunjukkan bahwa $P(m+1)$ benar.

Perhatikan bahwa

$$\sum_{j=0}^{m+1} A(m+1,j) = A(m+1,0) + A(m+1,1) + A(m+1,2) + \cdots + A(m+1,m+1).$$

Karena $A(n,j) = A(n-1,j-1) + A(n-1,j)$, sehingga

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m+1} A(m+1,j) &= A(m,0) + A(m,0) + A(m,1) + A(m,1) + A(m,2) + A(m,2) \\ &\quad + \cdots + A(m,m) + A(m,m+1) \\ &= 2\left(A(m,0) + A(m,1) + A(m,2) + \cdots + A(m,m)\right) + A(m,m+1) \\ &= 2\sum_{j=0}^{m+1} A(m,j) + A(m,m+1)\end{aligned}$$

$$= 2\left(3 \cdot 2^{m-1}\right)$$

$$= 3 \cdot 2^{m}$$

Terbukti benar bahwa $f_n\left(1,1\right) = \sum_{j=0}^{n} A\left(n, j\right) = 3 \cdot 2^{n-1}$.

■

4. Kesimpulan

Misalkan $A\left(n, j\right)$ merupakan koefisien dari $x^{n-j}y^{j}$ pada fungsi $f_n(x, y) = (x+y)^{n-1}(x+2y)$. Berdasarkan hasil dan pembahasan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. $A(n,j) = \begin{cases} 1 & ,j = 0 \\ \binom{n}{j} + \binom{n-1}{j-1} & ,j = 1,2,3,\dots,n-1 \\ 2 & ,j = n \end{cases}$
2. $A\left(n, n-2\right) = \left(n-1\right)^2$, untuk $n \geq 2$.
3. $\sum_{k=1}^{n} A\left(k,1\right) = A\left(n+1,2\right)$, dengan $n \geq 1$.
4. $\sum_{k=1}^{n} A\left(k, j\right) = A\left(n+1, j+1\right)$ untuk $n \geq 1, j \geq 1$.
5. $A\left(n, j\right) = A\left(n-1, j-1\right) + A\left(n-1, j\right), \ \forall n, j \geq 1$.
6. *Untuk setiap* $n \geq 1$ *dan* $j \geq 1$ *berlaku* $f_n\left(1,1\right) = \sum_{j=0}^{n} A\left(n, j\right) = 3 \cdot 2^{n-1}$
7. Jumlah setiap baris pada segitiga Lucas adalah $f_n\left(1,1\right) = \sum_{j=0}^{n} A\left(n, j\right) = 3 \cdot 2^{n-1}$.

DAFTAR PUSTAKA

Koshy, T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. New York: A Wiley-Interscience Publication, 2001.

Rosen, K. H., *Discrete Mathematics and Its Applications* (6th ed.), McGraw-Hill, New York, 2007.

Varberg, D. d.k.k., *Kalkulus, Jilid Dua*. (Edisi ke-9), Erlangga, Jakarta, 2011.