Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP)
Vol. 17 No. 1, Juni 2025, hal. 73-86
ISSN (Cetak) : 2085-1456; ISSN (*Online*) : 2550-0422

PENERAPAN METODE *JACKKNIFE RIDGE REGRESSION* UNTUK MENGATASI MULTIKOLINEARITAS (STUDI KASUS: KEMISKINAN DI PROVINSI JAWA TENGAH)

Nisa Tri Yulinda

Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman

Supriyanto*

Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman
supriyanto2505@unsoed.ac.id

Bambang Hendriya Guswanto

Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman

ABSTRACT. *Multicollinearity is one of the problems in linear regression that can lead to unstable parameter estimates. This study aims to address multicollinearity issues in multiple linear regression models applied to poverty data in Central Java Province using the Jackknife Ridge Regression method. The data used are secondary data from the Central Java Provincial Statistics Agency for 2022-2023, with the poverty rate as the dependent variable and eight independent variables representing poverty-related factors. This research was conducted using a literature review method and data analysis with R software. The results show that the Jackknife Ridge Regression method successfully mitigates multicollinearity and has a smaller bias values. The final model indicates that average years of schooling, life expectancy, labor force participation rate, human development index, and regional gross domestic product have a negative effect on the poverty rate. These findings highlight the importance of improving education quality, healthcare, human development, and access to basic infrastructure as key strategies for poverty alleviation in Central Java Province.*

Keywords*: Jackknife Ridge Regression, poverty, multicollinearity, multiple linear regression.*

ABSTRAK. Multikolinearitas merupakan salah satu masalah dalam regresi linier yang dapat menyebabkan estimasi parameter menjadi tidak stabil. Penelitian ini bertujuan untuk mengatasi multikolinearitas dalam model regresi linier berganda pada data kemiskinan di Provinsi Jawa Tengah dengan menggunakan metode *Jackknife Ridge Regression*. Data yang digunakan merupakan data sekunder dari Badan Pusat Statistik Provinsi Jawa Tengah tahun 2022-2023, dengan variabel tingkat kemiskinan sebagai variabel terikat dan delapan variabel bebas yang mencerminkan faktor-faktor penyebab kemiskinan. Penelitian ini menggunakan metode studi pustaka dan analisis data dengan *software* R. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode *Jackknife Ridge Regression* berhasil mengatasi masalah multikolinearitas serta menghasilkan nilai bias yang lebih kecil. Model tersebut menunjukkan bahwa rata-rata lama sekolah, angka harapan hidup, tingkat partisipasi angkatan kerja, indeks pembangunan manusia, dan produk domestik regional bruto memiliki pengaruh negatif terhadap tingkat kemiskinan. Hasil penelitian

*Penulis Korespondensi
Info Artikel : dikirim 15 Mei 2025; direvisi 13 Juni 2025; diterima 26 Juni 2025.

ini menunjukkan bahwa kebijakan pengentasan kemiskinan di Provinsi Jawa Tengah perlu difokuskan pada peningkatan kualitas pendidikan, kesehatan, partisipasi tenaga kerja, serta pertumbuhan ekonomi.

Kata Kunci: *Jackknife Ridge Regression*, kemiskinan, multikolinearitas, regresi linier berganda.

1. PENDAHULUAN

Regresi linier merupakan metode statistika yang digunakan untuk menjelaskan hubungan antara dua variabel atau lebih. Agar model regresi dapat dianggap valid sebagai alat prediksi, model tersebut harus memenuhi syarat uji asumsi klasik. Namun, penerapan regresi linier sering kali dihadapkan pada berbagai masalah, salah satunya adalah multikolinearitas. Menurut Mendenhall dan Sincich (2012: 363) multikolinearitas merujuk pada kondisi di mana terdapat hubungan linier yang sempurna atau hampir sempurna antara variabel bebas dalam model regresi.

Berbagai metode dikembangkan untuk mengatasi multikolinearitas, salah satunya adalah Regresi *Ridge*. Regresi *Ridge* selanjutnya dikembangkan menjadi beberapa metode, diantaranya metode *Generalized Ridge Regression* dan *Jackknife Ridge Regression*. Metode *Jackknife* merupakan teknik *resampling* yang digunakan untuk mengurangi bias pada estimator *Generalized Ridge Regression.*

Beberapa penelitian terdahulu telah menunjukkan efektivitas metode *Jackknife Ridge Regression* dalam mengatasi multikolinearitas. Sari, dkk. (2021) menemukan bahwa Regresi *Ridge* menghasilkan model terbaik dibandingkan Regresi *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator (LASSO)* dan *Elastic Net Regression*. Selain itu, penelitian Cruz, dkk. (2024) dan Ariani, dkk. (2017) juga menunjukkan bahwa *Jackknife Ridge Regression* lebih unggul dibandingkan metode *bootstrap*. Oleh karena itu, penelitian ini berfokus pada penggunaan *Jackknife Ridge Regression* untuk menangani multikolinearitas.

Kemiskinan merupakan isu multidimensi yang melibatkan banyak faktor saling terkait, seperti pendidikan, kesehatan, dan ekonomi. Hal ini berpotensi menimbulkan multikolinearitas dalam analisis data kemiskinan. Jawa Tengah menempati peringkat ketiga provinsi dengan tingkat kemiskinan tertinggi di

Indonesia. Pada Maret 2023, tingkat kemiskinan di provinsi ini mencapai 10,77%, dibandingkan dengan angka nasional sebesar 9,36% (Prasetyo, dkk., 2023).

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bentuk penduga parameter model regresi linier berganda menggunakan metode *Jackknife Ridge Regression* serta menginterpretasikan hasil estimasi model tersebut pada kasus kemiskinan di Provinsi Jawa Tengah.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode studi pustaka dengan data sekunder dari Badan Pusat Statistik Provinsi Jawa Tengah tahun 2022-2023, yaitu persentase tingkat kemiskinan sebagai variabel terikat. Variabel bebas yang digunakan yaitu persentase kasus diare balita (X_1), rata-rata lama sekolah (X_2), angka partisipasi sekolah (X_3), angka harapan hidup (X_4), tingkat partisipasi angkatan kerja (X_5), indeks pembangunan manusia (X_6), persentase rumah tangga dengan akses air bersih (X_7), dan produk domestik regional bruto (X_8).

Langkah-langkah penelitian adalah sebagai berikut:

1. menentukan bentuk penduga parameter model regresi linier berganda menggunakan metode *Jackknife Ridge Regression*;
2. mengaplikasikan metode *Jackknife Ridge Regression* pada data kemiskinan di Jawa Tengah dengan *software* R. Langkah-langkah analisis data adalah:
   a) mendeskripsikan data;
   b) melakukan analisis regresi linier berganda dengan metode kuadrat terkecil;
   c) melakukan uji multikolinearitas pada model regresi linier berganda;
   d) melakukan transformasi data menggunakan teknik pemusatan dan penskalaan;
   e) menghitung penduga parameter dengan metode kuadrat terkecil;
   f) menentukan nilai awal tatapan bias $\boldsymbol{K}$ untuk menghitung penduga awal parameter *Generalized Ridge Regression* menggunakan rumus $k_j = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\gamma}_j^2}$.
   g) melakukan iterasi pemilihan nilai $\boldsymbol{K}^i$, dengan ketentuan iterasi berhenti saat $\left|(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}{}^T\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR})^i - (\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}{}^T\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR})^{i-1}\right| \leq 0{,}0001$. Jika tidak memenuhi

looping pada syarat awal, maka $\boldsymbol{K}^i$ ditentukan dengan $\boldsymbol{K}^1$ yang akan digunakan untuk menduga parameter *Generalized Ridge Regression* (Solekakh, dkk., 2015);

h) menghitung penduga parameter dengan *Generalized Ridge Regression*;

i) menghitung penduga parameter *Jackknife Ridge Regression*;

j) mengidentifikasi multikolinearitas hasil model *Jackknife Ridge Regression* dengan nilai VIF menggunakan rumus (Marquardt, 1970):

$$VIF = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} + \boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} + \boldsymbol{K})^{-1}.$$

k) melakukan pengujian signifikansi terhadap parameter yang dihasilkan oleh metode *Jackknife Ridge Regression*;

l) melakukan transformasi model *Jackknife Ridge Regression* ke bentuk persamaan regresi awal;

m) menginterpretasikan hasil yang diperoleh dari model *Jackknife Ridge Regression*.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Bentuk Penduga Parameter *Jackknife Ridge Regression*

Metode *Jackknife Ridge Regression* dikembangkan dengan mengintegrasikan *Generalized Ridge Regression* dan teknik *resampling Jackknife*. Oleh karena itu, akan dibahas terlebih dahulu mengenai penduga *Generalized Ridge Regression.*

3.1.1 Penduga Parameter *Generalized Ridge Regression*

Berdasarkan teorema Dekomposisis Spektral (Gayatri, 2023) jika terdapat matriks simetris $\boldsymbol{V}$ maka terdapat matriks ortogonal $\boldsymbol{W}$ yang entrinya terdiri dari vektor-vektor eigen dari matriks $\boldsymbol{V}$, sehingga memenuhi hubungan $\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{\Lambda}$ dengan $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$, dimana $\boldsymbol{X}$ merupakan matriks variabel bebas yang telah ditransformasi berukuran $n \times p$. Matriks $\boldsymbol{\Lambda}$ berukuran $p \times p$ dengan elemen diagonal utamanya berupa nilai eigen $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ dari matriks $\boldsymbol{V}$. Selanjutnya, karena $\boldsymbol{W}$ ortogonal, maka $\boldsymbol{W}^T = \boldsymbol{W}^{-1}$, sehingga berlaku $\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^T = \boldsymbol{I}$. Kemudian, dengan mensubstitusikan matriks $\boldsymbol{I}$ pada model regresi $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, diperoleh $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$. Misalkan $\boldsymbol{X}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{Z}$ dan $\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma}$, maka $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}$.

Dengan demikian, penduga parameter metode kuadrat terkecil persamaan tersebut adalah

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ols} &= (\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Y}\\ &= ((\boldsymbol{XW})^T\boldsymbol{XW})^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Y}\\ \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ols} &= \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Y}.\end{aligned} \tag{1}$$

Karena $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{W}^T\boldsymbol{\beta}$, maka $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ols} = \boldsymbol{W}^T\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ols}$. Jadi, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ols} = \boldsymbol{W}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ols}$.

Selanjutnya, metode *Generalized Ridge Regression* bekerja dengan cara menambahkan parameter bias $\boldsymbol{K}$ yang berbeda pada setiap variabel bebasnya. Dengan demikian, persamaan $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}$ menjadi

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} = (\boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}, \tag{2}$$

dengan $\boldsymbol{K}$ merupakan matriks diagonal berukuran $p \times p$ dengan entri diagonal utamanya merupakan konstanta bias $k_1, k_2, \dots, k_p$ (Arrasyid, dkk., 2021).

Misalkan $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{K}$ dan $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ols}$, maka $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{XW}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ols}$. Kemudian, karena $\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{XW} = \boldsymbol{\Lambda}$ dan $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{K}$, maka

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{K})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ols} \tag{3}$$

dan $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} = \boldsymbol{W}^T\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GRR}$. Oleh karena itu, diperoleh penduga $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ untuk *Generalized Ridge Regression* yaitu $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GRR} = \boldsymbol{W}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}$.

Kemudian dengan mensubstitusikan Persamaan (3) ke $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GRR}$, diperoleh $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GRR} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ols})$. Karena $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{W}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{XW}$, dan $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ols} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Y}$, maka $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GRR} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} + \boldsymbol{WKW}^T)^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}$. Jika dimisalkan $\boldsymbol{A}_* = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} + \boldsymbol{K}_*$, dengan $\boldsymbol{K}_* = \boldsymbol{WKW}^T$, maka $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GRR}$ dapat dituliskan menjadi

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GRR} = {\boldsymbol{A}_*}^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}. \#(4)$$

Setelah diperoleh $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GRR}$, langkah selanjutnya adalah menentukan bias dari $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GRR}$. Diperoleh $E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GRR}) = E[\boldsymbol{W}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}] = \boldsymbol{W\gamma} - (\boldsymbol{WA}^{-1}\boldsymbol{K})\,\boldsymbol{\gamma}$, sehingga $Bias(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GRR}) = E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GRR}) - \boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{WA}^{-1}\boldsymbol{KW}^T\boldsymbol{\beta}$.

3.1.2 Penduga Parameter *Jackknife Ridge Regression*

Prinsip dasar metode *Jackknife* melibatkan penghapusan satu observasi dari dataset secara berulang (Rohma, dkk., 2022). *Jackknife Ridge Regression* bekerja dengan cara menggabungkan *Generalized Ridge Regression* dan teknik *resampling Jackknife*. Penduga yang digunakan adalah $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR(-\boldsymbol{i})}$ yaitu $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}$

dengan nilai ke-i yang dihapus. Diperoleh $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR(-\boldsymbol{i})} = \left(\boldsymbol{Z}_{(-\boldsymbol{i})}^T\boldsymbol{Z}_{(-i)} + \boldsymbol{K}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}_{(-\boldsymbol{i})}^T\boldsymbol{Y}_{(-i)} = \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR(-\boldsymbol{i})} = \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} - \left(\frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Z}_i(y_i - \boldsymbol{Z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR})}{1-R_i}\right)$ dengan $R_i = \boldsymbol{Z}_i^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Z}_i$.

Kemudian, menurut Hinkley (1977) nilai $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR(-\boldsymbol{i})}$ akan disubstitusikan ke rumus *pseudo-value* yaitu $\boldsymbol{Q}_i = \widehat{\boldsymbol{\gamma}} + n(1 - R_i)\left(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_{(-i)}\right)$. Dengan demikian, $\boldsymbol{Q}_i = \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} + n(1 - R_i)(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} - \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR(-i)}) = \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} + n\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Z}_i(y_i - \boldsymbol{Z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR})$. Penduga *Jackknife Ridge Regression* diperoleh dengan mencari rata-rata dari *pseudo-value*, yaitu $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{JRR} = \overline{\boldsymbol{Q}} = \frac{1}{n}\sum \boldsymbol{Q}_i = \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Z})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}$. Karena $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{\Lambda}$ dan $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{K}$, maka $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{JRR} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{K})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR.}$

Selanjutnya, menurut Persamaan (3) yang menyatakan bahwa $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{K})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ols}$, maka

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{JRR} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{K})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{K})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ols}, \#(5)$$

dan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{JRR} = \boldsymbol{W}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{JRR}$. Dengan mensubstitusikan Persamaan (5) ke $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{JRR}$ diperoleh $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{JRR} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{K})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{K})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ols}$. Karena, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{W}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\boldsymbol{W}$, dan $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}^T$, maka $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{W}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\boldsymbol{W} + \boldsymbol{K} = \boldsymbol{W}^T(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}^T)\boldsymbol{W}$. Jadi, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{JRR} = ((\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}})^{-1} + (\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}})^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}})^{-\boldsymbol{1}})\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}$.

Jika dimisalkan $\boldsymbol{A}_* = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} + \boldsymbol{K}_*$, dengan $\boldsymbol{K}_* = \boldsymbol{W}\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}^T$, maka penduga parameter dari metode *Jackknife Ridge Regression* yaitu

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{JRR} = \left(\boldsymbol{I} - ({\boldsymbol{A}_*}^{-1}\boldsymbol{K}_*)^2\right)\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ols}. \#(6)$$

Setelah diperoleh $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{JRR}$, langkah selanjutnya adalah menentukan bias dari $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{JRR}$. Diperoleh $E\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{JRR}\right) = E\left[\boldsymbol{W}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{JRR}\right] = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\gamma} - (\boldsymbol{W}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{K})^2)\,\boldsymbol{\gamma}$. Oleh karena itu, $Bias\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{JRR}\right) = E\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{JRR}\right) - \boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{W}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{K})^2\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{\beta}$.

3.2 Aplikasi Metode *Jackknife Ridge Regression* pada Data Kemiskinan

3.2.1 Analisis Regresi Linier dengan Metode Kuadrat Terkecil

Persamaan regresi linier berganda pada data kemiskinan di Provinsi Jawa Tengah yaitu

$$Y = 45{,}2100 + 0{,}0093X_1 - 1{,}2660X_2 + 0{,}02780X_3 - 0{,}1236X_4 - 0{,}1043X_5 + 0{,}0778X_6 - 0{,}0516X_7 - 1{,}77 \times 10^{-8}X_8. \#$$

Dengan melakukan uji F, diperoleh $F_{hitung} = 8{,}7894 > 2{,}0943 = F_{tabel}$, maka H_0 ditolak. Jadi, paling sedikit ada satu variabel bebas yang berpengaruh signifikan terhadap variabel terikat.

Sementara itu, dengan uji t diperoleh bahwa tidak ada variabel bebas yang memiliki $p - value < \alpha$. Jadi, tidak ada variabel bebas yang berpengaruh secara signifikan terhadap variabel terikat. Hal ini menunjukkan adanya indikasi bahwa model mengalami masalah, seperti multikolinearitas.

3.2.2 Uji Multikolinearitas

Uji multikolinearitas dapat dilakukan dengan analisis *Variance Inflation Factor* (VIF). Hasil uji multikolinearitas dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Uji Multikolinearitas Model Regresi Awal

Variabel	VIF
X_1	1,6213
$\boldsymbol{X_2}$	**24,9971**
X_3	1,3783
X_4	3,3477
X_5	1,3027
$\boldsymbol{X_6}$	**26,0032**
X_7	1,6216
X_8	1,4412

Tabel 1 menunjukkan bahwa variabel X_2 memiliki nilai VIF sebesar 24,9971 dan X_6 sebesar 26,0032. Nilai VIF di atas 10 menunjukkan bahwa variabel-variabel ini mengalami multikolinearitas sehingga perlu dilakukan metode regresi *ridge* untuk mengatasi multikolinearitas.

3.2.3 Analisis Regresi dengan *Generalized Ridge Regression*

Data yang digunakan untuk analisis dengan regresi *ridge* adalah data yang telah ditransformasi. Penduga parameter dengan Metode Kuadrat Terkecil yaitu $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{ols}$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ols}$ dihitung menggunakan Persamaan (1). Diperoleh hasil perhitungan sebagai berikut.

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{ols} = \begin{pmatrix} 0,3711 \\ 0,1454 \\ 0,1005 \\ -0,0841 \\ -0,0449 \\ -0,0714 \\ -0,2360 \\ -0,2941 \end{pmatrix}, \hat{\boldsymbol{\beta}}_{ols} = \begin{pmatrix} 0,0582 \\ -0,4999 \\ 0,0193 \\ -0,0688 \\ -0,1230 \\ -0,1027 \\ -0,1341 \\ 0,1526 \end{pmatrix}, \text{ dan } \hat{\sigma}^2 = \frac{JKS}{n-p-1} = \frac{0,4645}{61} = 0,0076.$$

Selanjutnya, dihitung estimator awal untuk k_j yaitu $k_1^0 = \frac{0,0076}{(0,3711)^2} = 0,05$; $k_2^0 = \frac{0,0076}{(0,1454)^2} = 0,36$; $k_3^0 = \frac{0,0076}{(0,1005)^2} = 0,75$; $k_4^0 = \frac{0,0076}{(-0,0841)^2} = 1,07$; $k_5^0 = \frac{0,0076}{(-0,0449)^2} = 3,78$; $k_6^0 = \frac{0,0076}{(-0,0714)^2} = 1,49$; $k_7^0 = \frac{0,0076}{(-0,2360)^2} = 0,13$; $k_8^0 = \frac{0,0076}{(-0,2941)^2} = 0,08$.

Kemudian, nilai tatapan bias awal disusun membentuk matriks $\boldsymbol{K}^0 = diag(k_1^0, k_2^0, k_3^0, k_4^0, k_5^0, k_6^0, k_7^0, k_8^0)$. Hasil dari $\boldsymbol{K}^0$ selanjutnya digunakan untuk menghitung $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}^0$ menggunakan Persamaan (2.12). Diperoleh:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}^0 = \begin{pmatrix} 0,3652 \\ 0,1151 \\ 0,0586 \\ -0,0347 \\ -0,0068 \\ -0,0178 \\ -0,1360 \\ -0,0549 \end{pmatrix}$$

dan nilai MSE untuk *Generalized Ridge Regression* $\hat{\sigma}^2 = 0,0081$. Jadi, diperoleh k_j^1 yaitu $k_1^1 = \frac{0,0081}{(0,3652)^2} = 0,061$; $k_2^1 = \frac{0,0081}{(0,1151)^2} = 0,612$; $k_3^1 = \frac{0,0081}{(0,0586)^2} = 2,357$; $k_4^1 = \frac{0,0081}{(-0,0347)^2} = 6,751$; $k_5^1 = \frac{0,0081}{(-0,0068)^2} = 176,248$; $k_6^1 = \frac{0,0081}{(-0,0178)^2} = 25,646$; $k_7^1 = \frac{0,0081}{(-0,1360)^2} = 0,438$; $k_8^1 = \frac{0,0081}{(-0,0549)^2} = 2,692$. Selanjutnya, nilai k_j^1 disusun membentuk matriks $\boldsymbol{K}^1 = diag(k_1^1, k_2^1, k_3^1, k_4^1, k_5^1, k_6^1, k_7^1, k_8^1)$.

Matriks $\boldsymbol{K}^1$ selanjutnya digunakan untuk menghitung $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}^1$ dan terus berlanjut sampai diperoleh $\left|(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR})^i - (\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR})^{i-1}\right| \leq 0,0001$. Berdasarkan perhitungan, hasil iterasi ternyata tidak memenuhi *looping* pada syarat awal sehingga nilai tetapan bias $\boldsymbol{K}$ yang akan digunakan untuk menduga parameter $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}$ adalah nilai $\boldsymbol{K}^1$. Jadi, penduga parameter *Generalized Ridge Regression* yaitu:

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} = \begin{pmatrix} 0,3646 \\ 0,1005 \\ 0,0311 \\ -0,0085 \\ -0,0002 \\ -0,0014 \\ -0,0703 \\ -0,0022 \end{pmatrix} \text{ dan } \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GRR} = \begin{pmatrix} -0,0321 \\ -0,2201 \\ -0,0556 \\ -0,1455 \\ -0,0230 \\ -0,2233 \\ -0,1480 \\ -0,0549 \end{pmatrix}.$$

3.2.4 Analisis Regresi dengan *Jackknife Ridge Regression*

Tahap selanjutnya yaitu menduga parameter *Jackknife Ridge Regression.* Diperoleh hasil perhitungan nilai $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{JRR}$ dan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{JRR}$ menggunakan Persamaan (5) dan (6) adalah:

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{JRR} = \begin{pmatrix} 0,3710 \\ 0,1315 \\ 0,0526 \\ -0,0161 \\ -0,0003 \\ -0,0027 \\ -0,1196 \\ -0,0044 \end{pmatrix} \text{ dan } \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{JRR} = \begin{pmatrix} 0,0006 \\ -0,2448 \\ -0,0429 \\ -0,1298 \\ -0,0562 \\ -0,2484 \\ -0,1596 \\ -0,0577 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, berdasarkan nilai-nilai penduga parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{JRR}$, dapat dibentuk model untuk *Jackknife Ridge Regressio*n sebagai berikut.

$$Y^* = 0,0006\, Z_1 - 0,2448\, Z_2 - 0,0429\, Z_3 - 0,1298\, Z_4 - 0,0562\, Z_5 - 0,2484\, Z_6 - 0,1596\, Z_7 - 0,0577\, Z_8.$$

Kemudian, akan dibandingkan nilai bias dari $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GRR}$ dan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{JRR}$ yaitu:

Tabel 2. Nilai bias penduga *Jackknife Ridge Regression*

Parameter	Nilai Bias GRR	Nilai Bias JRR
β_1	-0,0903	-0,0576
β_2	0,2798	0,2551
β_3	-0,0749	-0,0622
β_4	-0,0768	-0,0610
β_5	0,1000	0,0668
β_6	-0,1206	-0,1457
β_7	-0,0139	-0,0255
β_8	0,0977	0,0948

Berdasarkan Tabel 2, diperoleh penduga *Jackknife Ridge Regression* menghasilkan nilai-nilai bias yang lebih kecil. Oleh karena itu, metode *Jackknife Ridge Regression* berhasil mengurangi bias pada model regresi. Setelah menghitung bias dari penduga *Jackknife Ridge Regression*, perlu dipastikan bahwa variabel-variabel bebas yang terlibat dalam model sudah tidak mengalami multikolinearitas. Diperoleh nilai VIF untuk penduga koefisien *Jackknife Ridge Regression* sebagai berikut.

Tabel 3. Nilai VIF metode *Jackknife Ridge Regression*

Parameter	**Penduga Parameter**	**VIF**
β_1	0,0006	0,95646
β_2	-0,2448	0,34237
β_3	-0,0429	0,07903
β_4	-0,1298	0,00799
β_5	-0,0562	0,00003
β_6	-0,2484	0,00023
β_7	-0,1596	0,48534
β_8	-0,0577	0,06970

Berdasarkan Tabel 3, semua nilai VIF berada di bawah 10. Hal ini mengindikasikan bahwa tidak terjadi multikolinearitas pada model regresi. Jadi metode *Jackknife Ridge Regression* berhasil mengatasi multikolinearitas pada kasus kemiskinan di Jawa Tengah.

Tahap selanjutnya yaitu melakukan uji F. Diperoleh nilai $F_{hitung} = 8{,}0178 > 2{,}0943 = F_{tabel}$ maka H_0 ditolak. Artinya, paling sedikit ada satu variabel bebas yang berpengaruh secara signifikan terhadap variabel terikat. Sementara itu, hasil uji *t* dapat dilihat pada Tabel 4 berikut.

Tabel 4. Uji parsial metode *Jackknife Ridge Regression*

Parameter	$\boldsymbol{p-value}$	$\boldsymbol{\alpha}$
β_1	0,9890	α = 0,05
β_2	0,0007	
β_3	0,3496	
β_4	0,0000	
β_5	0,0000	
β_6	0,0000	
β_7	0,1341	
β_8	0,0000	

Berdasarkan Tabel 4, dapat dilihat bahwa parameter yang signifikan yaitu parameter $\beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_6$,dan β_8. Dengan demikian, variabel bebas X_2, X_4, X_5, X_6, dan X_8 secara individu berpengaruh terhadap variabel terikat. Ini menunjukkan bahwa peningkatan pendidikan, kesehatan, kualitas hidup, dan kesejahteraan ekonomi dapat menurunkan tingkat kemiskinan secara signifikan.

Model *Jackknife Ridge Regression* selanjutnya ditransformasi ke bentuk awal. Diperoleh $\beta_0 = 61{,}67, \beta_1 = 9.968 \times 10^{-5}$, $\beta_2 = -0{,}6201, \beta_3 = -0{,}062, \beta_4 = -0{,}2332, \beta_5 = -0{,}047, \beta_6 = -0{,}1883, \beta_7 = -0{,}0614$, dan $\beta_8 = -6{,}699 \times 10^{-9}$. Dengan demikian, model regresi linear berganda dengan penduga *Jackknife Ridge Regression* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y} &= 61{,}67 + 9.968 \times 10^{-5}\boldsymbol{X}_1 - 0{,}6201\boldsymbol{X}_2 - 0{,}0622\boldsymbol{X}_3 - 0{,}2332\boldsymbol{X}_4 \\ &\quad -0{,}0477\boldsymbol{X}_5 - 0{,}1883\boldsymbol{X}_6 - 0{,}0614\boldsymbol{X}_7 - 6{,}6998 \times 10^{-9}\boldsymbol{X}_8. \#\end{aligned}$$

Jika dibandingkan dengan nilai bias penduga *Generalized Ridge Regression*, model regresi linear berganda dengan penduga *Jackknife Ridge Regression* memberikan nilai-nilai bias yang lebih kecil. Dengan demikian, metode *Jackknife Ridge Regression* berhasil mengurangi bias pada model regresi.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Penelitian ini menunjukkan bahwa metode *Jackknife Ridge Regression* (JRR) dapat digunakan untuk mengatasi masalah multikolinearitas dalam model regresi linier berganda. Bentuk penduga parameter regresinya adalah

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{JRR} = \left(\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A}_*{}^{-1}\boldsymbol{K}_*)^2\right)\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ols}.$$

Selain itu, diperoleh model regresi linear berganda dengan penduga *Jackknife Ridge Regression* pada kasus kemiskinan di Provinsi Jawa Tengah yaitu:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y} &= 61{,}67 + 9.968 \times 10^{-5}\boldsymbol{X}_1 - 0{,}6201\boldsymbol{X}_2 - 0{,}0622\boldsymbol{X}_3 - 0{,}2332\boldsymbol{X}_4 \\ &\quad -0{,}0477\boldsymbol{X}_5 - 0{,}1883\boldsymbol{X}_6 - 0{,}0614\boldsymbol{X}_7 - 6{,}6998 \times 10^{-9}\boldsymbol{X}_8.\end{aligned}$$

Penelitian selanjutnya disarankan mengeksplorasi metode alternatif seperti regresi akar laten atau metode *Modified Jackknife Ridge Regression* yang merupakan pengembangan dari metode *Jackknife*, maupun metode lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Ariani, D., Nasution, Y. N., dan Yuniarti, D., *Perbandingan Metode Bootstrap dan Jackknife Resampling dalam Menentukan Nilai Estimasi dan Interval Konfidensi Parameter Regresi*, Jurnal EKSPONENSIAL, **8**(1) (2017), 43–50.

Arrasyid, A. H., Ispriyanti, D., dan Hoyyi, A., *Metode Modified Jackknife Ridge Regression dalam Penanganan Multikolinieritas (Studi Kasus Indeks Pembangunan Manusia di Jawa Tengah)*, Jurnal Gaussian **10**(1) (2021), 104–113.

Cruz, L., Blanco, J., dan Giraldo, R., *Bootstrap versus Jackknife: Confidence Intervals, Hypothesis Testing, Density Estimation, and Kernel Regression*, Revista Ciencia En Desarrollo, **2**(15) (2024), 143–152.

Gayatri, M. R., *Dekomposisi Spektral pada Ruang Vektor: (The Spectral Decompositions on a Vector Space)*, Fraction: Jurnal Teori Dan Terapan Matematika, **3**(1) (2023), 8–13.

Hinkley, D. V., *Jackknifing in Unbalanced Situations*, Technometrics, **19**(3) (1977), 285–292.

Mendenhall, W., and Sincich, T., *A Second Course in Statistics: Regression Analysis*, Edisi Ketujuh, Prentice Hall Upper Saddle River, NJ., 2012.

Prasetyo, S. B., Sofianto, A., Febrian, L., Ambarwati, O. C., Widodo, W., and Nuriyanto, L. K., *Rekonstruksi Strategi Penanggulangan Kemiskinan Jawa Tengah: Bukan Sekedar Bantuan Sosial*, Analisis Kebijakan Daerah, **1**(1) (2023), 9–12.

Rohma, N. N., Pramoedyo, H., and Astutik, S., *Perbandingan Pendugaan Metode Ordinary Kriging dan Metode Ordinary Kriging dengan Teknik Jackknife*. MAp (Mathematics and Applications) Journal, **4**(2) (2022), 101–111.

Sari, F. M., Notodiputro, K. A., and Sartono, B., *Analisis Tingkat Kemiskinan di Provinsi Sumatera Barat Melalui Pendekatan Regresi Terkendala (Ridge Regression, LASSO, dan Elastic Net)*, Statistika, **21**(1) (2021), 29–36.

Solekakh, N. A., Ispriyansti, D., dan Sudarno, S., *Estimasi Parameter Regresi Ridge Menggunakan Iterasi Hoerl, Kennard, dan Baldwin (Hkb) untuk Penanganan Multikolinieritas*, Jurnal Gaussian, **4**(4) (2015), 1109–1116.