Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP)
Vol. 16 No. 2, Desember 2024, hal. 185-200
ISSN (Cetak) : 2085-1456; ISSN (*Online*) : 2550-0422

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER ATAS ALJABAR MAX-PLUS DAN APLIKASINYA MENGGUNAKAN VISUAL STUDIO

James Doberhol

Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman, Indonesia

Suroto*

Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman, Indonesia
suroto@unsoed.ac.id

Bambang Hendriya Guswanto

Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman, Indonesia

ABSTRACT. *Determining solution of the system of linear equations over max-plus algebra cannot be done as in linear algebra, since its algebraic structure is a semifield. The aim of this research is determining the existence of solution in the system of linear equations over max-plus algebra and designing the application using visual studio. The determination of this existence is carried out using a difference matrix and a reduction matrix that obtained from the coefficient matrix and constant vektor of the system of linear equations. Then, the process of determining this solution is designed in the application using visual studio. The results obtained are the existence and step procedure for solving a system of linear equations over max-plus algebra as outlined in the application using visual studio..*

Keywords*: Max-plus, system of linear equations, solution, visual studio.*

ABSTRAK. Penyelesaian sistem persamaan linier atas aljabar max-plus tidak dapat dilakukan seperti halnya pada aljabar linier, dikarenakan struktur aljabarnya hanya semilapangan. Tujuan penelitian ini adalah menentukan eksistensi penyelesaian sistem persamaan linier atas aljabar max-plus dan rancangan aplikasinya menggunakan visual studio. Penentuan eksistensi penyelesaian tersebut dilakukan dengan menggunakan matriks selisih serta matriks reduksi yang diperoleh dari matriks koefisien dan vektor konstan sistem persamaan linier. Selanjutnya, dilakukan perancangan aplikasi dari proses penentuan penyelesaian tersebut menggunakan visual studio. Hasil yang diperoleh adalah eksistensi serta prosedur langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linier atas aljabar max-plus yang dituangkan dalam aplikasi menggunakan visual studio.

Kata Kunci: Max-plus, sistem persamaan linier, penyelesaian, visual studio

1. PENDAHULUAN

Beberapa permasalahan dalam berbagai bidang pada kehidupan sehari-hari dapat diselesaikan dengan membuat model matematika dan mencari penyelesaiannya. Salah satunya adalah memodelkan suatu permasalahan dalam

*Penulis Korespondensi
Info Artikel : dikirim 23 Oktober 2024; direvisi 25 Desember 2024; diterima 26 Desember 2024.

bentuk sistem persamaan linier yang merupakan salah satu topik pembahasan pada aljabar linier. Pembahasan mengenai sistem persamaan linier pada aljabar linier dapat dirujuk pada beberapa literatur (Anton & Rorres, 2013), (Cherney, *et.al.*, 2013), (Lay, 2012). Namun demikian, aljabar linier tidak dapat menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang bersifat non-linier.

Aljabar max-plus adalah himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan riil, yang dilengkapi dengan operasi maksimum sebagai operasi penjumlahan dan operasi penjumlahan biasa sebagai operasi perkaliannya. Untuk selanjutnya, aljabar max-plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max}$ dan merupakan suatu semilapangan. Untuk setiap elemen kecuali elemen nol pada $\mathbb{R}_{\max}$ tidak memiliki invers penjumlahan. Hal ini yang menjadi perbedaan utama antara aljabar max-plus dengan aljabar linier. Namun demikian, aljabar max-plus dapat menguraikan suatu permasalahan dari sistem non-linier dalam sudut pandang aljabar linier menjadi sistem linier dalam sudut pandang aljabar max-plus. Pembahasan mengenai aljabar max-plus dan beberapa penerapannya dapat dirujuk pada beberapa literatur (Heidergott, 2007), (Heidergott, *et.al.*, 2014), (Ariyanti, 2011), (Nasrulyati, 2017), (Rudhito, 2020), (Subiono, 2009).

Sistem persamaan linier juga sudah dikembangkan pada kajian aljabar max-plus. Pada beberapa kasus, sistem persamaan linier atas aljabar max-plus dapat memberikan representasi yang lebih efisien dalam penyelesaian untuk masalah tertentu seperti ketika terdapat ketidakpastian dalam parameter sistem, representasi dari max-plus dapat membantu dalam menangani suatu batasan ketidakpastian. Selain itu, sifat assosiatif pada aljabar max-plus membuat sistem persamaan linier atas max-plus memiliki sifat tidak tergantung terhadap urutan operasi-operasi yang dilakukan. Hal ini dapat bermanfaat dalam beberapa aplikasi, seperti dalam bidang kontrol sistem dan analisis jaringan.

Sistem persamaan linier atas aljabar max-plus dapat digunakan dalam masalah *ramp handling* pesawat (Ayu, 2017). Pada pembahasan tersebut lebih ditekankan pada sisi aplikasi sistem persamaan linier atas aljabar max-plus. Dalam penelitian tersebut dibahas mengenai penanganan setiap pesawat dalam masalah *ramp handling* yang meliputi beberapa kegiatan yang memiliki estimasi waktu yang berbeda. Namun kegiatan *ramp handling* harus diselesaikan sebelum waktu keberangkatan setiap pesawat, sehingga permasalahan ini dapat ditemukan dengan sistem persamaan linier max-plus dan perhitungannya menggunakan *software* matlab.

Karena aljabar max-plus merupakan semilapangan, maka untuk menentukan penyelesaian sistem persamaan linier atas aljabar max-plus tidak dapat dilakukan seperti halnya pada aljabar linier yang objek kajiannya berupa lapangan, khususnya lapangan himpunan semua bilangan riil atau kompleks. Dengan demikian, diperlukan langkah yang berbeda pada saat menentukan penyelesaian sistem persamaan linier atas aljabar max-plus.

Pada (Ayu, 2017), pembahasan hanya dilakukan pada sisi penerapan sistem persamaan linier saja dan dilakukan dengan menggunakan alat bantu *software* Matlab, tanpa memperhatikan syarat eksistensi penyelesaian dari sistem persamaan linier tersebut. Syarat eksistensi penyelesaian tersebut merupakan sesuatu yang sangat penting dalam penerapan sistem persamaan linier atas max-plus. Selanjutnya, pada artikel ini disajikan pembahasan tentang penentuan syarat eksistensi penyelesaian sistem persamaan linier atas aljabar max-plus yang belum dilakukan pada (Ayu, 2017). Berdasarkan eksistensi penyelesaian tersebut, selanjutnya dapat ditentukan suatu prosedur langkah penyelesaian sistem persamaan linier atas aljabar max-plus dan dirancang dengan menggunakan aplikasi visual studio berbasis *windows form application*.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian literatur yang sifatnya mengkaji dan mengembangkan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya yang berkaitan dengan sistem persamaan linier atas aljabar max-plus. Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menentukan subpenyelesaian dari sistem persamaan linier $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ dan beberapa sifatnya.
2. Menentukan matriks selisih setiap entri baris $\mathbf{A}$ dan entri $\mathbf{b}$ yang bersesuaian yang dinotasikan dengan $\mathbf{D}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$.

3. Menentukan matriks reduksi dari matriks $\mathbf{D}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$ yang dinotasikan dengan $\mathbf{R}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$
4. Mengidenfikasi sistem persamaan linier apakah memiliki penyelesaian tunggal, penyelesaian banyak atau tidak memiliki penyelesaian berdasarkan matriks $\mathbf{R}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$.
5. Menentukan entri vektor $\mathbf{x}^*$ yakni maksimum dari setiap kolom $\mathbf{D}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$, yang merupakan solusi untuk sistem persamaan linier.
6. Merancang struktur aplikasi penyelesaian sistem persamaan linier atas aljabar maxplus,
7. Melakukan koding dan mendesain aplikasi penyelesaian sistem persamaan linier atas aljabar max-plus,
8. Melakukan simulasi aplikasi dengan menggunakan contoh kasus penyelesaian sistem persamaan linier.

3. PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER ATAS ALJABAR MAX-PLUS

Aljabar max-plus adalah sistem matematika $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian seperti berikut

$$a \oplus b = \max\{a, b\}$$
$$a \otimes b = a + b$$

untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_{\max}$. Untuk selanjutnya, struktur aljabar dari $\mathbb{R}_{\max}$ adalah semilapangan dengan elemen nol $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$. Untuk setiap elemen tak nol $x \in \mathbb{R}_{\max}$ tidak memiliki invers penjumlahan. Hal ini yang menjadi perbedaan utama anatara aljabar max-plus dan aljabar linier

Sistem persamaan linear atas aljabar max-plus memiliki bentuk umum

$$\begin{gathered} a_{11} \otimes x_1 \oplus a_{12} \otimes x_2 \oplus \cdots \oplus a_{1n} \otimes x_n = b_1 \\ a_{21} \otimes x_1 \oplus a_{22} \otimes x_2 \oplus \cdots \oplus a_{2n} \otimes x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \otimes x_1 \oplus a_{m2} \otimes x_2 \oplus \cdots \oplus a_{mn} \otimes x_n = b_m \end{gathered}$$

dengan $a_{ij}, x_j, b_i \in \mathbb{R}_{\max}$ untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 1,2,3, \dots, n$. Selanjutnya sistem persamaan linier tersebut dapat disajikan dalam bentuk $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$, untuk $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$ dan $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_{\max}^{m}$ dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Pada konteks aljabar konvensional, bentuk sistem persamaan linier atas aljabar max-plus dapat disajikan dalam bentuk mencari nilai maksimum seperti berikut

$$\begin{gathered} \max\{(a_{11} + x_1), (a_{12} + x_2), \cdots, (a_{1n} + x_n)\} = b_1 \\ \max\{(a_{21} + x_1), (a_{22} + x_2), \cdots, (a_{2n} + x_n)\} = b_2 \\ \vdots \\ \max\{(a_{m1} + x_1), (a_{m2} + x_2), \cdots, (a_{mn} + x_n)\} = b_m. \end{gathered}$$

Sistem persamaan linear $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak selalu mempunyai suatu penyelesaian, sehingga untuk permasalahan penyelesaian sistem persamaan linear $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ dapat diperlemah dalam konsep subpenyelesaian. Sebelum membahas subpenyelesaian, terlebih disajikan pembahasan mengenai konsep ketidaksamaan pada aljabar max-plus yang akan digunakan untuk mendefinisikan konsep subpenyelesaian.

Pada pembahasan aljabar max-plus, ketaksamaan didefinisikan dengan $a \leq_m b$ jika $a \oplus b = \max(a, b) = b$, untuk $a, b \in \mathbb{R}_{\max}$. Konsep ini dapat diperluas pada pembahasan vektor atas aljabar max-plus pada setiap komponennya. Untuk vektor $x, y \in x \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$, $x \leq_{\mathrm{m}} y$ jika $x_i \leq_{\mathrm{m}} y_i$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$. Dengan demikian, vektor $x \leq_{\mathrm{m}} y$ jika $x_i \oplus y_i = \max(x_i, y_i) = y_i$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$. Berikut diberikan definisi subpenyelesaian pada sistem persamaan linier atas atas aljabar max-plus.

Definisi 3.1. *Diberikan sistem persamaan linier atas aljabar max-plus* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$, *dengan* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$ *dan* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_{\max}^{m}$. *Vektor* $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$ *dinamakan subpenyelesaian dari sistem persamaan linear* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *apabila vektor* x' *memenuhi* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x}' \leq_m \mathbf{b}$.

Diperhatikan bahwa untuk vector $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad \cdots \quad \varepsilon]^T$ selalu memenuhi ketaksamaan $\mathbf{A} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \ \leq_m \mathbf{b}$**.** Dengan demikian, vektor $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad \cdots \quad \varepsilon]^T$ selalu memenuhi ketaksamaan $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x}' \ \leq_m \mathbf{b}$ pada Definisi 3.1. Hal ini mengakibatkab eksistensi subpenyelesaian $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ akan selalu terjamin ada.

Pada sistem persamaan linier atas aljabar max-plus $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$,apabila terdapat beberapa subpenyelesaian maka dapat ditentukan suatu subpenyelesaian terbesar dari sistem persamaan linier tersebut. Definisi berikut menjelaskan konsep subpenyelesaian terbesar pada sistem persamaan linier atas aljabar max-plus.

Definisi 3.2. *Suatu subpenyelesaian* $\hat{\mathbf{x}}$ *dari sistem persaman linier* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *dinamakan subpenyelesaian terbesar jika* $\mathbf{x}' \leq_m \hat{\mathbf{x}}$ *, untuk setiap subpenyelesaian* $\mathbf{x}'$ *dari sistem persamaan linier* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Berikut disajikan suatu teorema yang menjelaskan hubungan antara suatu subpenyelesaian dengan subpenyelasaian lainnya pada sistem persamaan linier atas aljabar max-plus.

Teorema 3.3. *Misalkan* $\hat{\mathbf{x}}$ *adalah subpenyelesaian terbesar sistem persamaan linier* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$. *Vektor* $\mathbf{x}'$ *merupakan subpenyelesaian sistem* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *jika dan hanya jika* $\mathbf{x}' \ \leq_m \ \hat{\mathbf{x}}$.

Selanjutnya disajikan teorema mengenai eksistensi subpenyelesaian terbesar dari suatu sistem persamaan linear atas aljabar max-plus

Teorema 3.4. *Diberikan* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ *dengan entri setiap kolomnya tidak semuanya sama dengan* ε *dan* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. *Subpenyelesaian terbesar dari sistem persamaan linier* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *ada, yakni* $\hat{\mathbf{x}}$ *dengan* $-\hat{x}_j = \max_{i=1,2,\ldots,m} (-b_i + a_{ij})$, *untuk setiap* $j = 1,2,\ldots,n$.

Berdasarkan Teorema 3.4 diperoleh bahwa

$$-\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\hat{x}_1 \\ -\hat{x}_2 \\ \vdots \\ -\hat{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max\limits_{i=1,2,\ldots,m}(-b_i + a_{i1}) \\ \max\limits_{i=1,2,\ldots,m}(-b_i + a_{i2}) \\ \vdots \\ \max\limits_{i=1,2,\ldots,m}(-b_i + a_{in}) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \otimes (-\mathbf{b}).$$

Jadi untuk menentukan subpenyelesaian terbesar $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$, pertama-tama dapat dilakukan dengan menghitung $-\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \otimes (-\mathbf{b})$.

Penentuan penyelesaian sistem persamaan linier atas aljabar max-plus tidak dapat dilakukan seperti halnya pada sistem persamaan linier pada aljabar linier. Pada aljabar linier objek pembahasan adalah himpunan semua bilangan riil yang memiliki struktur aljabar lapangan, sementara pada aljabar max-plus hanya semilapangan. Dengan demikian, diperlukan suatu langkah yang berbeda untuk menentukan penyelesaian sistem linier atas aljabar max-plus.

Berikut disajikan suatu teorema yang membahas syarat cukup dan syarat perlu suatu sistem persamaan linier atas aljabar max-plus memiliki suatu penyelesaian.

Teorema 3.5. *Sistem persamaan linier* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *mempunyai penyelesaian jika dan hanya jika untuk vektor subpenyelesaian terbesar* $\hat{\mathbf{x}}$ *berlaku* $\mathbf{A} \otimes \hat{\mathbf{x}} \geq_{\mathrm{m}} \mathbf{b}$**.**

Berdasarkan Teorema 3.5 diperoleh suatu akibat seperti berikut ini.

Akibat 3.6. *Diberikan* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{max}^{m\times n}$ *dengan entri setiap kolomnya tidak semuanya sama dengan* ε *dan* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. *Jika* $\hat{\mathbf{x}}$ *adalah subpenyelesaian terbesar sistem persamaan linear* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *maka untuk setiap indeks* $j = 1,2,\ldots,n$ *terdapat suatu indeks* $i(j) = 1,2,\ldots,m$ *sedemikian hingga* $\mathbf{A}_{i(j),j} \otimes \hat{x}_j = b_{i(j)}$.

Diberikan matriks $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\max}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$ dengan a_{ij} tidak semuanya sama dengan ε dan $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$. Berdasarkan Teorema 3.5, subpenyelesaian terbesar $\mathbf{x}^*$ pada sistem persamaan linier $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan

$$-\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} -x^*_1 \\ -x^*_2 \\ \vdots \\ -x^*_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max\limits_{i=1,2,\ldots,m} (-b_i + a_{i1}) \\ \max\limits_{i=1,2,\ldots,m} (-b_i + a_{i2}) \\ \vdots \\ \max\limits_{i=1,2,\ldots,m} (-b_i + a_{in}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max\limits_{i=1,2,\ldots,m} (a_{i1} - b_i) \\ \max\limits_{i=1,2,\ldots,m} (a_{i2} - b_i) \\ \vdots \\ \max\limits_{i=1,2,\ldots,m} (a_{in} - b_i) \end{bmatrix}$$

diidentifikasi apakah memenuhi ketaksamaan $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x}^* \geq_{\mathrm{m}} \mathbf{b}$. Apabila memenuhi ketaksamaan tersebut, maka sistem persamaan linier atas aljabar max-plus akan memiliki penyelesaian. Dengan demikian, syarat cukup dan syarat perlu suatu sistem persamaan linier atas aljabar max-plus $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ memiliki penyelesaian adalah subpenyelesaian terbesar $\hat{\mathbf{x}}$ memenuhi ketaksamaan $\mathbf{A} \otimes \hat{\mathbf{x}} \geq_{\mathrm{m}} \mathbf{b}$ pada Teorema 3.5. Dengan kata lain, pernyataan pada Teorema 3.5 merupakan syarat untuk menjamin eksistensi penyelesaian sistem persamaan linier $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}.$

Setelah diperoleh eksistensi penyelesaian sistem persamaan linier atas aljabar max-plus $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b},$ selanjutnya dapat disajikan suatu prosedur langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linier tersebut. Sebelum menentukan prosedur langkah, terlebih dahulu didefinisikan matriks selisih dan matriks reduksi yang akan digunakan pada prosedur langkah.

Matriks selisih (*discrepancy matrix*) adalah matriks berbentuk

$$\mathbf{D}_{\mathbf{A},\mathbf{b}} = [d_{i,j}] = \begin{bmatrix} a_{11} - b_1 & a_{12} - b_1 & \cdots & a_{1n} - b_1 \\ a_{21} - b_2 & a_{22} - b_2 & \cdots & a_{2n} - b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_m & a_{m2} - b_m & \cdots & a_{mn} - b_m \end{bmatrix}$$

dengan a_{ij} adalah entri-entri pada matriks koefisien dan b_i adalah entri-entri pada vektor konstan sistem persamaan linier $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}.$ Matriks $\mathbf{D}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$ adalah suatu matriks konvensional (matriks dengan operasi aljabar penjumlahan dan perkalian biasa) dengan semua batas atas dari x_i, dan setiap x_i dapat ditentukan dengan mengambil minimum dari kolom ke-i dari $\mathbf{D}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$. Untuk menentukan jenis penyelesaian sistem persamaan linier $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$, selanjutnya didefinisikan matriks reduksi $\mathbf{R}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$ seperti berikut

$$\mathbf{R}_{\mathbf{A},\mathbf{b}} = [r_{i,j}] \text{ dimana dimana } r_{\mathrm{i,j}} = \begin{cases} 1 \text{ , jika } d_{i,j} = \text{maksimum kolom j} \\ 0 \text{ , jika } d_{i,j} \neq \text{maksimum kolom j} \end{cases}$$

dengan $d_{i,j}$ adalah entri-entri pada matriks selisih.

Teorema 3.7 *Diberikan sistem persamaan linier* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$, *untuk* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ *dan elemen elemen pada setiap kolom* $\mathbf{A}$ *tidak semuanya sama dengan* ε *dan* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

1. *Jika terdapat baris nol pada matriks* $\mathbf{R}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$ *maka sistem tidak mempunyai penyelesaian.*
2. *Jika terdapat paling tidak satu elemen* 1 *pada tiap baris* $\mathbf{R}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$, *maka* $\boldsymbol{x}^*$ *adalah penyelesaian dari sistem persamaan* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Berdasarkan Teorema 3.7 dapat disimpulkan bahwa $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak memiliki suatu penyelesaian apabila terdapat paling sedikit 1(satu) baris yang entrinya bernilai nol (0) pada matriks $\mathbf{R}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$. Syarat tersebut belum menjelaskan lebih lanjut bahwa $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ memiliki suatu penyelesaian.

Definisi 3.8 *Elemen bernilai* 1 *pada suatu baris* $\mathbf{R}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$ *dinamakan elemen peubah tetap jika :*

1. *Elemen tersebut merupakan satu-satunya elemen bernilai* 1 *pada baris tersebut (lone-one), atau*
2. *Elemen tersebut berada pada kolom yang sama dengan lone-one.*

Elemen-elemen bernilai 1 *lainnya dinamakan elemen-elemen slack.*

Selanjutnya akan diberikan teorema yang menunjukkan sistem persamaan linier $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ memiliki penyelesaian tunggal atau memiliki banyak penyelesaian.

Teorema 3.9. *Diberikan sistem persamaan linier* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *dengan* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ *dan elemen pada setiap kolomnya tidak semuanya sama dengan* ε *dan* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_{\max}^{m}$ *, serta penyelesaian persamaan* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *ada.*

1. *Jika tiap baris* $\mathbf{R}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$ *memiliki lone-one, maka sistem persamaan linier memiliki penyelesaian tunggal.*
2. *Jika terdapat elemen-elemen slack pada* $\mathbf{R}_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}}$, *maka sistem persamaan linier memiliki banyak penyelesaian.*

Berdasarkan matriks $\mathbf{D}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$ dan $\mathbf{R}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$ yang diperoleh dapat ditentukan prosedur langkah penyelesaian sistem persamaan linier $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$, seperti berikut :

Langkah 1. Menentukan matriks $\mathbf{D}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$

Langkah 2. Menentukan matriks $\mathbf{R}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$

Langkah 3. Menentukan apakah sistem persamaan linier memiliki penyelesaian tunggal, penyelesaian banyak atau tidak memiliki penyelesaian bedasarkan bentuk matriks $\mathbf{R}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$

Langkah 4. Menentukan $\mathbf{x}^*$ sebagai sebagai penyelesaian, dengan entri setiap $-\mathbf{x}^*$ merupakan maksimum dari kolom $\mathbf{D}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$.

Berikut diberikan contoh penyelesaian sistem persamaan linier atas aljabar max-plus.

Contoh 3.10. Diberikan sistem persamaan linier atas aljabar max-plus

$$1 \otimes x_1 \oplus 2 \otimes x_2 \oplus 0 \otimes x_3 = 5$$
$$-1 \otimes x_1 \oplus 3 \otimes x_2 \oplus 5 \otimes x_3 = 9$$
$$2 \otimes x_1 \oplus 0 \otimes x_2 \oplus -3 \otimes x_3 = 4$$
$$8 \otimes x_1 \oplus 5 \otimes x_2 \oplus 2 \otimes x_3 = 10.$$

Sistem persamaan linier dapat disajikan dalam bentuk $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix} \text{dan } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Matriks selisih dan matriks reduksi dari sistem persamaan linier yakni

$$\mathbf{D}_{\mathbf{A},\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -5 \\ -10 & -6 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \\ -2 & -5 & -8 \end{bmatrix} \text{dan } \mathbf{R}_{\mathbf{A},\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena setiap baris pada matriks $\mathbf{R}_{\mathbf{A},\mathrm{b}}$ memuat tepat sebuah entri bernilai 1, maka sistem persamaan linier tersebut memiliki penyelesaian tunggal. Langkah selanjutnya akan dicari penyelesaian dari sistem persamaan linier tersebut. Jika vektor penyelesaian dari sistem persamaan linier adalah $\mathbf{x}^*$, maka vektor $-\mathbf{x}^*$ dapat ditentukan dengan mengambil nilai maksimum dari setiap kolom pada $\mathbf{D}_{\mathbf{A},b}$ yaitu :

$$-\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} \max\{-4,-10,-2,-2\} \\ \max\{-3,-6,-4,-5\} \\ \max\{-5,-4,-5,-8\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

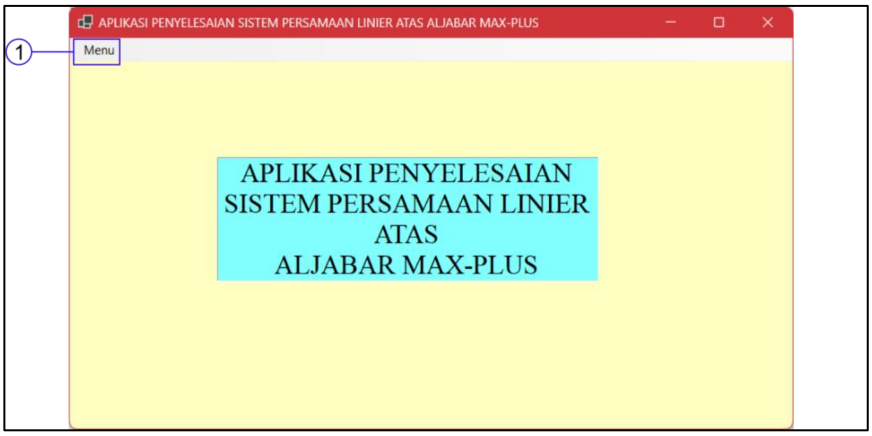
Lebih lanjut diperoleh vektor

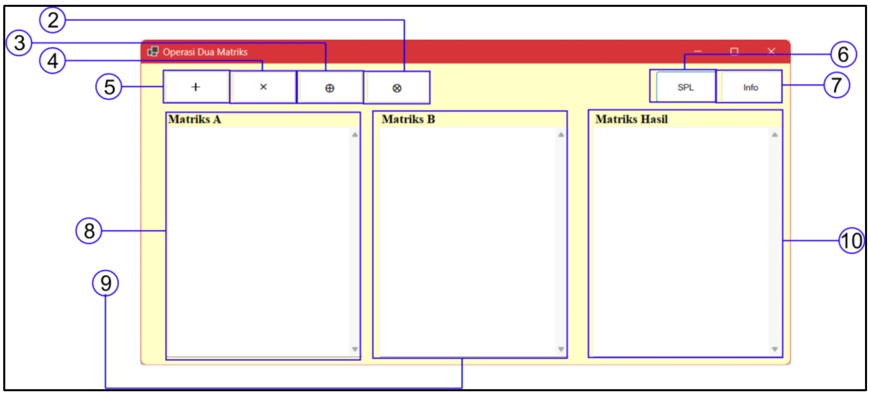
$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

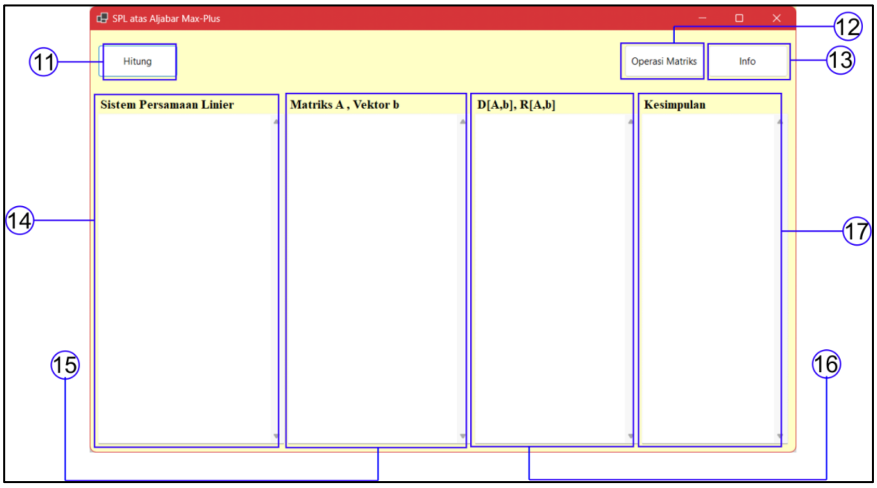
yang merupakan penyelesaian sistem persamaan linier.

4. RANCANGAN APLIKASI PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER ATAS ALJABAR MAX-PLUS

Langkah-langkah penyelesaian sistem persamaan linier aljabar max-plus dapat diimplementasikan ke dalam program *Visual Basic* untuk memudahkan dalam menetunkan penyelesaian dari suatu sistem persamaan linier.







Gambar 1. ***Tampilan program penyelesaian sistem persamaan linier atas aljabar max-plus***

Pada Gambar 1, tampilan program penyelesaian sistem persamaan linier atas aljabar max-plus ini memiliki 3 jendela utama yaitu jendela awal, operasi dua matriks dan sistem persamaan linier atas aljabar max-plus. Berikut penjelasan tentang fungsi dari masing-masing komponen yang ada pada tampilan program yang disajikan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Penjelasan fungsi dari komponen

1 : *menu bar*	7 : *Button* Info	13 : *Button* Info
2 : *Button* ⊗	8 : *textbox* Matriks A	14 : *textbox* Sistem Persamaan Linier
3 : *Button* ⊕	9 : *textbox* Matriks B	15 : *textbox* Matriks A, vektor b
4 : *Button* ×	10 : *textbox* Matriks Hasil	16 : *textbox* D[A,b], R[A,b]
5 : *Button* +	11 : *Button* Hitung	17 : *textbox* Kesimpulan
6 : *Button* SPL	12 : *Button* Operasi Matriks	

Pada jendela Operasi Dua Matriks terdapat fitur untuk menghitung dua buah matriks dengan menggunakan empat operasi yang disediakan yaitu penjumlahan, perkalian, penjumlahan atas aljabar max-plus, dan perkalian atas aljabar max-plus. Selanjutnya, pada jendela Sistem Persamaan Linier terdapat fitur untuk mencari penyelesaian dari suatu sistem persamaan linier atas aljabar max-plus. Berikut akan dijelaskan cara menggunakan program pada jendela Operasi Dua Matriks :

1. Masukkan matriks pada Matriks **A** dan Matriks **B** dengan entri setiap matriks dipisah menggunakan spasi;
2. Jika menekan *button* $+$ program akan menghitung penjumlahan atas aljabar max-plus antara matriks **A** dan matriks **B** dan hasil penjumlahannya akan ditampilkan di *textbox* Matriks Hasil.
3. Jika menekan *button* $\times$ program akan menghitung perkalian antara matriks **A** dan matriks **B** dan hasil perkaliannya akan ditampilkan di *textbox* Matriks Hasil.
4. Jika menekan *button* $\oplus$program akan menghitung penjumlahan atas aljabar max-plus antara matriks **A** dan matriks **B** dan hasil penjumlahan matriks atas aljabar max-plus akan ditampilkan di *textbox* Matriks Hasil.
5. Jika menekan *button* $\otimes$ program akan menghitung perkalian atas aljabar max-plus antara matriks **A** dan matriks **B** dan hasil perkalian matriks atas aljabar max-plus akan ditampilkan di *textbox* Matriks Hasil.
6. Apabila ingin mengakhiri program dapat menekan tombol *close* yang berada di pojok kanan atas.

Selanjutnya akan dijelaskan cara menggunakan program pada jendela Sistem Persamaan Linier :

1. Masukkan sistem persamaan linier kedalam *textbox* Persamaan;
2. Jika *textbox* Persamaan kosong maka akan muncul peringatan untuk mengisi *textbox* Persamaan agar proses dapat dilanjutkan;
3. Ketika menekan *button* Hitung maka akan dilakukan proses mencari penyelesaian dari sistem persamaan linier yang diinput;
4. Sistem persamaan linier yang diinput akan diubah dalam bentuk matriks yang ditampilkan dalam *textbox* Matriks **A**, Vektor **b**;
5. Hasil mencari $\mathbf{D}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$ dan $\mathbf{R}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$ dari sistem persamaan linier yang diinput ditampilkan dalam *textbox* D[A,b], R[A,b];
6. Hasil mencari $\mathbf{x}^*$ dari mencari nilai maksimum setiap kolom pada $\mathbf{D}_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$ dan kesimpulan yang dapat diperoleh dari $\mathbf{R}_{\boldsymbol{A},\mathbf{b}}$ ditampilkan dalam *textbox* Kesimpulan;

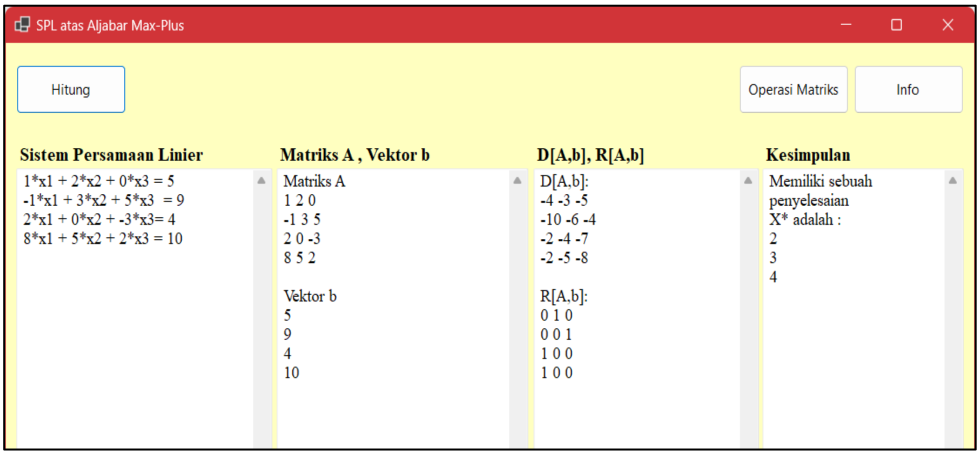
7. Apabila ingin mengakhiri program dapat menekan tombol close yang berada di pojok kanan atas.

Berikut dberikan contoh simulasi penggunaan rancangan aplikasi.

Contoh 4.1. Diketahui sistem persaaman linier atas aljabar max-plus

$$1 \otimes x_1 \oplus 2 \otimes x_2 \oplus 0 \otimes x_3 = 5$$
$$-1 \otimes x_1 \oplus 3 \otimes x_2 \oplus \mathbf{5} \otimes \boldsymbol{x_3} = 9$$
$$2 \otimes x_1 \oplus 0 \otimes x_2 \oplus -3 \otimes x_3 = 4$$
$$8 \otimes x_1 \oplus 5 \otimes x_2 \oplus 2 \otimes x_3 = 10.$$

Hasil yang diperoleh dari aplikasi sistem persamaan linier atas aljabar max-plus dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. ***Hasil perhitungan untuk Contoh 4.1***

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Sistem persamaan linier atas aljabar max-plus dapat sajikan dalam bentuk umum $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ dan memiliki tiga buah kemungkinan penyelesaian yaitu tidak memiliki sebuah penyelesaian, memiliki sebuah penyelesaian, memiliki banyak penyelesaian. Penyelesaian dari sistem persamaan linier $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$ atas aljabar max-plus berupa vektor $\mathbf{x}^*$. Vektor $-\mathbf{x}^*$ dapat ditentukan dengan mengambil nilai maksimum dari setiap kolom pada matriks selisih $\mathbf{D}_{\mathbf{A},b}$. Selanjutnya, matriks $\mathbf{R}_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}}$ memiliki peranan sebagai penentu jenis penyelesaian dari sistem persamaan linier serta dapat diaplikasikan sebagai titik penentu dalam menarik kesimpulan pada aplikasi penyelesaian sistem persamaan linier atas aljabar max-plus dengan menggunakan visual studio. Penelitian selanjutnya dapat dilakukan pada sistem persamaan linier atas aljabar max-plus dengan bentuk $\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{C} \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{d}.$

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. dan Rorres, C., *Elementary Linear Algebra: Applications Version*, John Wiley & Sons, 2013.

Ariyanti, G., *Aljabar Max-Plus: Suatu Kajian Teori dan Aplikasi Fundamentalnya*, Widya Warta, **35**(2) (2013), 32-43.

Ayu, R. W. S., *Sistem Persamaan Linear Aljabar Max-Plus dan Aplikasinya dalam Masalah RAMP Handling Pesawat*, Skripsi, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta, 2015..

Cherney, D., Denton, T., Thomas, R. dan Waldron, A., *Linear Algebra*, Davis California, 2013.

Heidergott, B., *Max-Plus Algebra and Queues*, Vrije Universiteit, Amsterdam, 2007.

Heidergott, B., Olsder, G. J., & Van Der Woude, J., Max Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications, Vol. 48, Princeton University Press, 2014.

Lay, D.C., *Linear Algebra and Its Applications*, 4th Edition, Addison-Wesley Pearson, 2012.

Nasrulyati, T. S., *Aljabar Max-Plus dan Aplikasinya: Model Sistem Produksi Sederhana*, Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika, 1**7**(1) (2017), 1-6.

Rudhito, M. A., *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*, Sanata Dharma University Press, 2020.

Subiono, S., Aljabar Maxplus dan Aplikasinya: Model Sistem Antrian, *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, **6**(1) (2009), 49-59