Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP)
Vol. 16 No. 2, Desember 2024, hal. 133-146
ISSN (Cetak) : 2085-1456; ISSN (*Online*) : 2550-0422

GRAF PRIMA KOPRIMA ATAS GRUP DIHEDRAL

M.Shofiyulloh

Jurusan Matematika, UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta, Indoensia

Arif Munandar*

Jurusan Matematika, UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta, Indoensia
arif.munandar@uin-suka.ac.id

Khurul Wardati

Jurusan Matematika, UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta, Indoensia

ABSTRACT. *A coprime prime graph over a finite group is a representation of a finite group on a graph by viewing group members as vertices of the graph and two distinct vertices x and y are adjacent if and only if order x and order y are prime or mutually prime. This research examines how to characterize the coprime prime graph over the dihedral group. Through analysis of the patterns that appear in the graphs formed, properties of coprime prime graphs over dihedral groups can be found, especially those related to the characterization of complete graphs and Hamiltonian graphs. This research also discusses the vertex connectivity of the coprime prime graph over the dihedral group.*

Keywords*: Prime Coprime Graph. Dihedral Groups, Hamiltonian, Connectivity*

ABSTRAK. Graf prima koprima atas grup hingga merupakan representasi grup hingga pada graf dengan memandang anggota grup sebagai vertek dari graf dan dua vertek berbeda x dan y terhubung jika dan hanya jika order x dan order y adalah bilangan prima atau saling prima. Penelitian ini mengkaji bagaimana karakterisasi graf prima koprima atas grup dihedral. Melalui analisis terhadap pola yang muncul pada graf yang terbentuk, dapat ditemukan sifat sifat dari graf prima koprima atas grup dihedral yang berkaitan dengan karakterisasi graf komplit dan graf Hamilton. Kemudian, penelitian ini diakhiri dengan pembahasan konektivitas vertek pada graf prima koprima atas grup dihedral.

Kata Kunci: Graf Prima Koprima, Grup Dihedral, Hamilton, Konektivitas

1. PENDAHULUAN

Graf merupakan salah satu konsep di bidang matematika yang banyak diaplikasikan untuk berbagai hal, seperti penyelesaikan persoalan penjadwalan, pengoptimalan hingga penggambaran molekul pada bidang kimia. Akhir akhir ini, makin banyak penelitian graf yang dimanfaatkan untuk menggambarkan objek-objek abstrak seperti penggambaran teori grup yang di representasikan pada graf.

*Penulis Korespondensi
Info Artikel : dikirim 28 November 2024; direvisi 12 Desember 2024; diterima 18 Desember 2024.

Graf hadir untuk membuat konsep abstrak seperti grup menjadi bentuk fisik dengan relasi antar elemennya dapat terlihat kasat mata.

Penelitian representasi graf dari berbagai struktur aljabar seperti grup bukan sesuatu hal baru, Artur Cayley (1878), orang pertama yang merepresentasikan grup berhingga pada graf. Oleh karenanya representasi grup pada graf ini kemudian disebut dengan graf Cayley. Penelitian lanjutan mengenai graf Cayley yang dilakukan oleh Gallian dengan mendefiniskan untuk suatu grup berhingga G dan $S \subset G,$ dimana setiap elemen dari grup G adalah vertek graf cayleynya dan untuk sebarang $x, y \in G$, vertek x dan y saling terhubung jika dan hanya jika $xs = y$ untuk suatu $s \in S$ (Joseph A. Gallian, 2013). Penelitian yang dilakukan oleh Luo dkk mengembangkan graf Cayley dengan memperumum grup berhingganya menjadi semigrup (Luo et al., 2011). Penelitian dari Zhu dkk juga mengeneraslisasi graf Cayley pada semigrup berhingga dan melihat sifat-sifat yang dihasilkannya (Wang, 2013). Sementara Hosseinzadeh dan A. Assari mendefinisikan berbagai operasi yang dapat dilakukan dalam Cayley graf pada semigrup (Assari & Hosseinzadeh, 2013).

Penelitian yang dilakukan Kelarev dan Quinn memperkenalkan power graf sebagai graf yang himpunan vertek adalah semua elemen dari G dan dua vertek berbeda a dan b terhubung jika dan hanya jika $a^x = b$ atau $b^y = a$ untuk suatu x dan y bilangan bulat positif (Kelarev & Quinn, 2002). Power graf yang dikenalkan Kalarev dan Quinn tersebut merupakan graf berarah, sementara versi tidak berarahnya dikemukakan dalam penelitian (Chakrabarty et al., 2009). Penelitian lanjutan mengenai power graf versi tidak berarah dalam konteks grup berhingga dilakukan (Cameron & Ghosh, 2011) dan (Alireza et al., 2015). Sementara (Ali et al., 2022) yang melakukan penelitian mengenai power graf pada grup khusus yaitu dihedral dan quarternion tergeneralisasi.

Penelitian tentang representasi grup ke graf yang memperhatikan order grup dilakukan dalam (Al-hasanat & Al-hasanat, 2019) yang mendefinisikan order graf sebagai graf yang terbentuk dari representasi grup berhingga G dengan memandang derajat dari grup G sebagai vertek dan vertek g insiden dengan h jika order dari grup g membagi order dari grup h atau sebaliknya. Penelitian dengan memandang elemen dari grup sebagai vertek dan keterhubungan yang serupa dengan order graf dilakukan dalam (Munandar, 2022a) dan dinamakan graf yang terbentuk sebagai graf order elemen. Sementara itu, (Sattanathan & Kala, 2009) melakukan penelitian tentang graf order prima yang didefinisikan elemen dalam grup G sebagai vertek, dan elemen g, h dalam G saling terhubung jika dan hanya jika order dari grup g dan h saling prima. Penelitian dalam (Ma et al., 2014) memperkenalkan kembali dan memberi nama graf order prima sebagai graf koprima dan mempelajari berbagai sifat-sifatnya. Penelitian lanjutan mengenai graf koprima dibahas dalam (Munandar, 2023).

Penelitian yang dituliskan dalam (Adhikari & Banerjee, 2022) mendefinisikan Graf Prima Koprima Atas Grup Hingga, yaitu graf yang terbentuk dari representasi grup berhingga G dengan memandang derajat dari grup G sebagai vertek dan dua vertek berbeda x dan y terhubung jika dan hanya jika order x dan order y adalah bilangan prima atau saling prima. Hasil penelitian yang dikemukakan (Adhikari & Banerjee, 2022) adalah konsep dasar graf prima koprima atas grup hingga, graf prima koprima yang membentuk graf Euler, graf komplit, graf planar dan membahas konektivitas vertek pada graf prima koprima atas grup bilanghan bulat modulo n. Penelitian tersebut belum membahas mengenai graf prima koprima atas grup dihedral yang membentuk graf Hamilton dan konektivitas vertek pada graf prima koprima atas grup dihedral, sehingga penulis membahasnya dalam penelitian ini. Sejauh penelusuran penulis, bagian tersebut belum dibahas dalam penelitian manapun.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan studi literatur, selain itu teorema-teorema yang dihasilkan diperoleh dengan mempelajari pola-pola dari graf yang terbentuk untuk order-order tertentu. Untuk keutuhan dari artikel ini beberapa terminologi tentang grup dan graf diperlukan. Terminologi pada graf diambil dari buku (Munandar, 2022b) sementara terminologi tentang grup dihedral dijelaskan sebagai berikut

Definisi 2.1. (Dummit & Foote, 2004) Diberikan bilangan asli n. Grup G merupakan grup dihedral dengan order $2n$ dimana $n \geq 3$ dinotasikan dengan D_{2n} dan didefinisikan

$$D_{2n} = \{r, s | r^n = e, s^2 = e, srs^{-1} = r^{-1}\}$$

dimana $r, s \in D_{2n}$.

Order dari elemen dalam grup dihedral memegang peranan penting dalam penentuan graf yang terbentuk karena definisi dari graf prima koprima berhubungan dengan order dari setiap elemen dari grup. Untuk sebarang grup G, order dari elemen $g \in G$ dinotasikan $o(g)$.

Teorema 2.2. (Febriantono dkk., 2024) Misalkan D_{2n} adalah grup dihedral. Order elemen dari D_{2n} adalah

$$o(r^i s^j) = \begin{cases} \dfrac{n}{FPB(i,n)}, & \text{untuk } j = 0 \\ 2, & \text{untuk } j = 1 \end{cases}$$

dengan $r^i s^j \neq e$ dan $0 \leq i < n$.

Definisi 2.3. (Adhikari dan Banerjee, 2022) Diberikan G adalah grup hingga dengan $|G| > 2$. Graf $\Theta(G) = (V, E)$ disebut graf prima koprima jika vertek di dalam V adalah seluruh elemen di dalam G dan sembarang dua vertek berbeda x, y terhubung jika dan hanya jika $FPB(o(x), o(y))$ sama dengan 1 atau $FPB(o(x), o(y)) = p$, dimana p adalah bilangan prima.

Setelah diberikan terminilogi tentang grup dihedral. Selanjutnya, diberikan terminologi tentang graf prima koprima atas grup hingga sebagai berikut.

Teorema 2.4. (Adhikari dan Banerjee, 2022) Diberikan G adalah grup siklik berhingga dengan order n. Diperoleh graf $\Theta(G)$ adalah graf komplit jika dan hanya jika n adalah bilangan prima.

Definisi 2.5. (Adhikari dan Banerjee, 2022) Himpunan semua elemen grup G yang mempunyai order prima yang dinotasikan $S^*(G)$ dan $S(G) = \{e\} \cup S^*(G)$, dimana e adalah elemen identitas dari G.

Teorema 2.6. (Adhikari dan Banerjee, 2022) Jika n adalah komposit, maka $\kappa(\Theta(\mathbb{Z}_n)) = |S(\mathbb{Z}_n)|$, dimana $\kappa(\Theta(\mathbb{Z}_n))$ adalah nilai konektivitas vertek pada graf $\Theta(\mathbb{Z}_n)$.

Akibat 2.7. (Adhikari dan Banerjee, 2022) Jika $n = pq$ dimana p, q adalah bilangan prima berbeda dengan $p < q$, maka $\kappa(\Theta(\mathbb{Z}_{pq})) = p + q - 1$.

Akibat 2.8. (Adhikari dan Banerjee, 2022) Jika $n = p^m$ dimana p adalah bilangan prima dan $m \in \mathbb{N}$ maka $\kappa(\Theta(\mathbb{Z}_{p^m})) = p$.

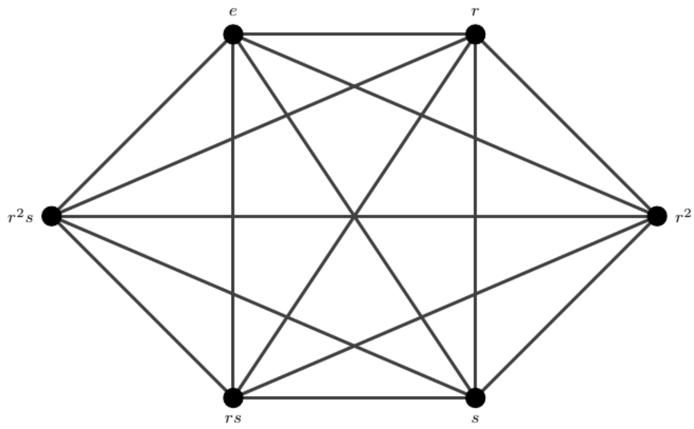
3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk mengawali artikel ini, akan dibahas salah satu hasil dari penelitian (Adhikari dan Banerjee, 2022) namun sebelumnya akan diberikan contoh graf prima koprima atas grup dihedral D_{2n} dimana n adalah bilangan prima. Sebagai berikut.

Contoh 3.1. Diberikan $\Theta(D_6)$ adalah graf prima koprima atas grup dihedral dengan $n = 3$. Diperoleh vertek-vertek dari $\Theta(D_6)$ merupakan elemen-elemen pada grup D_6 yaitu e, r, r^2, s, rs, r^2s. Untuk mengetahui keterhubungan dari setiap vertek, dicari terlebih dahulu order dari masing masing elemen grup D_6.

$$o(e) = 1, o(r) = 3, o(r^2) = 3, o(s) = o(rs) = o(r^2s) = 2$$

Berdasarkan Teorema 2.3 diperoleh semua vertek pada $\Theta(D_6)$ saling terhubung yang berarti $\Theta(D_6)$ adalah graf komplit yang diilustrasikan sebagai berikut.



Gambar 1. Graf Prima Koprima atas Grup Dihedral D_6

Contoh di atas memotivasi munculnya teorema di bawah ini.

Teorema 3.2. (Adhikari dan Banerjee, 2022) Graf prima koprima atas grup dihedral D_{2n} adalah graf komplit jika dan hanya jika n adalah bilangan prima.

Bukti. Diberikan grup dihedral dengan orde $2n$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$D_n = \{(r, s): r^n = s^2 = 1, rs = se^{-1}\}.$$

Vertek dari graf prima koprima atas grup dihedral D_{2n} dipartisi menjadi dua himpunan, yaitu:

$$A = \{r^i: 0 \leq i \leq n-1\}$$

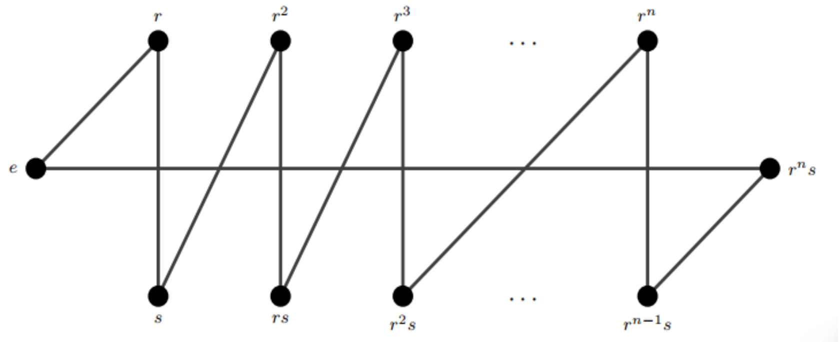
$$B = \{sr^i: 0 \leq i \leq n-1\}$$

Graf yang diinduksikan oleh elemen A membentuk subgraf dari $\Theta(D_{2n})$ dan isomorfik terhadap $\Theta(\mathbb{Z}_n)$ dan karena setiap elemen dari B memiliki order 2. Dengan demikian, subgraf yang diinduksi oleh unsur B bersifat isomorfik dengan K_n. Karena order tiap anggota B adalah 2, maka setiap vertek di A saling terhubung dengan B. Oleh karena itu, graf $\Theta(D_{2n})$ akan menjadi graf komplit jika dan hanya jika graf $\Theta(\mathbb{Z})$ adalah graf komplit. Dengan merujuk pada Teorema 2.4, graf $\Theta(\mathbb{Z}_n)$ adalah komplit jika dan hanya jika n adalah bilangan prima. Jadi, kita dapat menyimpulkan bahwa graf $\Theta(D_{2n})$ komplit jika dan hanya jika n adalah bilangan prima. ■

Selanjutnya, akan diberikan teorema tentang graf prima koprima atas grup dihedral yang merupakan graf Hamilton. Berikut adalah teorema dan buktinya.

Teorema 3.3. Graf prima koprima atas grup dihedral adalah graf Hamilton.

Bukti. Diberikan graf $\Theta(D_{2n})$ adalah graf prima koprima atas grup dihedral dengan anggota verteknya adalah $V = \{e, r, r^2, r^3, \dots, r^n, s, rs, r^2s, r^3s, \dots, r^{n-1}s, r^ns\}$. Berdasarkan Teorema 2.2 diperoleh $o(s) = o(rs) = o(r^2s) = \cdots = o(r^{n-1}s) = o(r^ns) = 2$ yang berarti vertek tersebut saling terhubung dengan seluruh vertek pada graf $\Theta(D_{2n})$ dan elemen e juga jelas saling terhubung dengan seluruh vertek pada graf $\Theta(D_{2n})$. Jadi pada graf $\Theta(D_{2n})$ dapat selalu dibentuk circuit Hamilton yaitu $e - r - s - r^2 - rs, r^3 - \cdots - r^n - r^{n-1}s - r^ns - e$. Untuk lebih jelas akan diilustrasikan sebagai berikut.



Gambar 2. Pola Sirkuit Hamilton pada Graf Prima Koprima atas Grup Dihedral

Berdasarkan penjelasan di atas, dapat diambil kesimpulan bahwa setiap graf prima koprima atas grup dihedral pasti graf Hamilton. ■

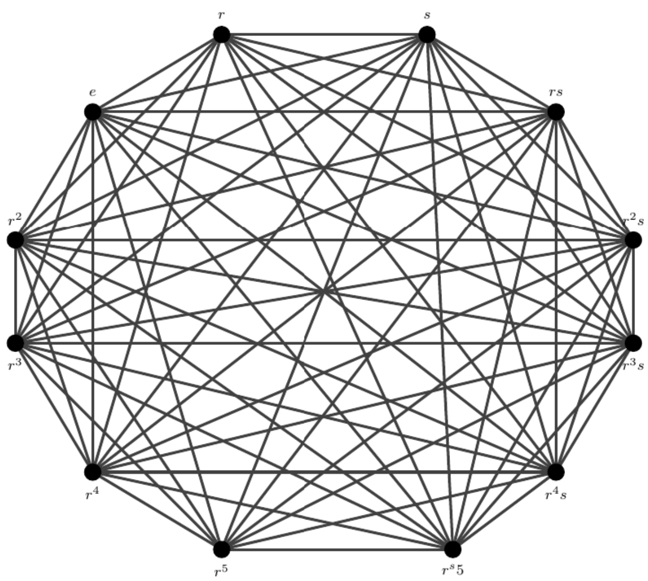
Selanjutnya akan dibahas mengenai konektivitas vertek pada graf prima koprima atas grup dihedral. Berdasarkan Teorema 3.3 diperoleh graf $\Theta(D_{2p})$ adalah graf komplit, sehingga jelas konektivitas vertek graf komplit adalah jumlah semua vertek dari grup dikurang 1. Hal tersebut memotivasi munculnya teori berikut.

Teorema 3.4. Diberikan grup dihedral D_{2n} dengan n adalah bilangan prima, diperoleh $\kappa(\Theta\big(D_{2p}\big) = 2p - 1$ dimana $\kappa(\Theta\big(D_{2p}\big)$ adalah konektivitas vertek graf prima koprima atas grup D_{2p}.

Bukti. Diberikan grup dihedral D_{2p} dimana p adalah bilangan prima, berdasarkan Teorema 3.2 diperoleh graf $\Theta\big(D_{2p}\big)$ adalah graf komplit. Jelas bahwa konektivitas pada graf komplit yang memiliki $2n$ vertek adalah $2n - 1$. Dapat disimpulkan bahwa $\kappa(\Theta\big(D_{2p}\big) = 2p - 1.$ ■

Selanjutnya, akan dibahas konektivitas vertek graf $\Theta(D_{2n})$ dimana n adalah bilangan komposit. Sebelumnya akan diberikan contoh konektivitas vertek $\Theta(D_{2n})$ dimana n adalah bilangan komposit.

Contoh 3.5. Diberikan $\Theta(D_{12})$ adalah graf prima koprima atas grup dihedral dengan $n = 6$. Diperoleh vertek-vertek dari $\Theta(D_{12})$ adalah elemen-elemen dari grup D_{12} yaitu $e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, rs, r^2s, r^3s, r^4s, r^5s$. Graf prima koprima dari grup D_{12} diilustrasikan sebagai berikut.



Gambar 3. Graf Prima Koprima dari Grup D_{12}

Selanjutnya, supaya graf $\Theta(D_{12})$ menjadi graf tidak terhubung maka harus menghilangkan vertek $S = \{e, r, r^3, r^4, s, rs, r^2s, r^3s, r^4s, r^5s\}$. Berikut ilustrasi grafnya.

Gambar 4. Graf $\Theta(D_{12}) - S$

Jadi nilai $\kappa\big(\Theta(D_{12})\big) = 10$.

Selanjutnya akan dicari $S(\Theta(D_{12}))$, terlebih dahulu dicari order dari masing masing elemen pada D_{12} sebagai berikut.

$$o(e) = 1, o(r) = 6, o(r^2) = 3, o(r^3) = 2, o(r^4) = 3, o(r^5) = 6$$
$$o(s) = o(rs) = o(r^2s) = o(r^3s) = o(r^4s) = o(r^5s) = 2$$

Berdasarkan Definisi 2.5 diperoleh

$$S\big(\Theta(D_{12})\big) = \{e, r^2, r^3, r^4, s, rs, r^2s, r^3s, r^4s\}.$$

Oleh karena itu dapat diambil kesimpulan nilai dari $\kappa\big(\Theta(D_{12})\big) = |S(D_{12})|$. Hal tersebut memotivasi munculnya teorema berikut.

Teorema 3.6. Diberikan grup dihedral D_{2n} dengan n adalah bilangan komposit, diperoleh konektivitas vertek graf prima koprima atas grup dihedral D_{2n} adalah $\kappa(\Theta(D_{2n}) = |S(D_{2n})|$.

Bukti. Diberikan grup dihedral D_{2n} dengan n adalah bilangan komposit. Diketahui bahwa $D_{2n} = \{r^is^j \mid 0 \leq i \leq n, j = 0,1\}$. Berdasarkan Teorema 2.2, setiap elemen dalam grup dihedral dapat dibentuk dengan r^is^j, di mana $0 \leq i < n \ dan\, j = 0, 1$. Berdasarkan Teorema 2.2, diketahui bahwa elemen grup yang memuat $j = 1$ memiliki order elemen 2, yang jelas merupakan bilangan prima.

Sementara itu, order elemen grup yang memuat $j = 0$ adalah isomorfik dengan grup $\mathbb{Z}_n$. Elemen grup yang memuat $j = 1$ jelas menjadi bagian dari $\kappa(\Theta(D_{2n}))$ dan $S(D_{2n})$. Berdasarkan Teorema 2.6 yang menyatakan bahwa $\kappa(\Theta(\mathbb{Z}_n)) = |S(\mathbb{Z}_n)|$, serta penjelasan bahwa elemen grup yang memuat $j = 1$ menjadi bagian dari $\kappa(\Theta(D_{2n}))$ dan $S(D_{2n})$, dapat disimpulkan bahwa $\kappa(\Theta(D_{2n})) = |S(D_{2n})|$.■

Selanjutnya, setelah memahami teorema yang menyatakan bahwa konektivitas vertek $\kappa(\Theta(D_{2n})) = |S(D_{2n})|$ dimana n adalah komposit. Dengan adanya teorema tersebut ternyata memunculkan beberapa akibat sebagai berikut.

Akibat 3.7. Jika grup dihedral D_{2pq} dimana p, q adalah bilangan prima berbeda dengan $p < q$, maka $\kappa\left(\Theta\left(D_{2pq}\right)\right) = pq + p + q - 1$.

Bukti. Diberikan grup dihedral D_{2pq} dimana p, q adalah bilangan prima berbeda dengan $p < q$. Diketahui $D_{2n} = \{r^i s^j | 0 \leq i \leq n-1, j = 0\}$. Berdasarkan Teorema 2.2 diperoleh $\frac{pq}{FPB(i,pq)}$ merupakan order elemen pada grup D_{pq}. Artinya, $o(r^i)$ merupakan order elemen grup $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk setiap $r^i \in D_{2pq}$. Kemudian berdasarkan Teorema 2.2 diperoleh $o(r^i s) = 2$ untuk setiap $r^i s \in D_{2pq}$. Jadi diperoleh $S\left(D_{2pq}\right) = \{e, p, 2p, 3p, \dots, (q-1)p, q, 2q, 3q, \dots, (p-1)q, 2 \text{ sebanyak } pq\}$ sehingga $\left|S\left(\Theta\left(D_{2pq}\right)\right)\right| = pq + p + q - 1$. Berdasarkan Teorema 3.4 diperoleh $\kappa\left(\Theta\left(D_{2pq}\right)\right) = \left|S\left(D_{2pq}\right)\right|$ oleh karena itu $\kappa\left(\Theta\left(D_{2pq}\right)\right) = pq + p + q - 1$.■

Akibat 3.8. Jika grup dihedral D_{2p^m} dimana p adalah bilangan prima dan $m \in \mathbb{N}$, maka $\kappa\left(\Theta\left(D_{2p^m}\right)\right) = p^{\mathrm{m}} + p$.

Bukti. Diberikan grup dihedral D_{2p^m} dimana p adalah bilangan prima dan $m \in \mathbb{N}$, Diketahui $D_{2n} = \{r^i s^j | 0 \leq i \leq n-1, j = 0, 1\}$. Berdasarkan Teorema 2.2 diperoleh $\frac{p^m}{FPB(i,p^m)}$ merupakan order setiap elemen pada grup D_{p^m} untuk setiap

$0 \leq i < n$. Artinya, $o(r^i)$ merupakan order masing masing elemen grup $\mathbb{Z}_{p^m}$ untuk setiap $r^i \in D_{2p^m}$. Kemudian berdasarkan Teorema 2.2 diperoleh $o(r^i s) = 2$ untuk setiap $r^i s \in D_{2p^m}$. Jadi diperoleh $S(D_{2p^m}) = \{e, p^{m-1}, 2p^{m-1}, 3p^{m-1}, \dots, (p-1)p^{m-1}, 2 \text{ sebanyak } p^m\}$ sehingga $\left|S\left(\Theta(D_{2p^m})\right)\right| = p^m + p$. Berdasarkan Teorema 3.4 diperoleh $\kappa\left(\Theta(D_{2p^m})\right) = \left|S(D_{2p^m})\right|$ oleh karena itu $\kappa\left(\Theta(D_{2p^m})\right) = p^m + p$.■

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Graf prima koprima atas grup dihedral merupakan graf Hamilton. Sementara graf prima koprima atas grup dihedral D_{2n} adalah graf komplit jika dan hanya jika n adalah bilangan prima. Konektivitas vertek graf prima koprima atas grup dihedral D_{2n} dengan n merupakan bilangan prima adalah $2n - 1$, sedangkan konektivitas vertek graf prima koprima atas grup dihedral D_{2n} dengan n merupakan bilangan komposit adalah jumlah elemen yang memiliki order prima ditambah 1, yang berakibat konektivitas vertek graf prima koprima atas grup dihedral D_{2pq} dimana p, q merupakan bilangan prima berbeda dengan $p < q$ adalah $pq + p + q - 1$. Sementara konektivitas vertek graf prima koprima atas grup dihedral D_{2p^m} dimana p merupakan bilangan prima dan m merupakan anggota bilangan asli adalah $p^m + p$.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah memberikan kontribusi dalam penyelesaian penelitian ini, terutama dukungan finansial melalui program Research Leader yang memungkinkan penulis untuk melaksanakan penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Adhikari, A. dan Banerjee, S., *Prime coprime graph of a finite group*, Novi Sad Journal of Mathematics, **52**(2) (2022), 41–59, https://doi.org/10.30755/NSJOM.11151.

Al-hasanat, B. N. dan Al-hasanat, A. S., *Order Graph : A New Representation of Finite Groups*, International Journal of Mathematics and Computer Science, **14**(4) (2019), 809–819.

Ali, F., Fatima, S., dan Wang, W., *On the Power Graphs of Certain Finite Groups*, Linear and Multilinear Algebra, **70**(19) (2022), 3803–3817, https://doi.org/10.1080/03081087.2020.1856028.

Alireza, D., Ahmad, E., dan Abbas, J., *Some Results on The Power Graphs of Finite Groups*, ScienceAsia, **41**(1) (2015), 73–78. https://doi.org/10.2306/scienceasia1513-1874.2015.41.073.

Assari, A. dan Hosseinzadeh, N., *Graph Operations on Cayley Graphs of Semigroups*, International Journal of Applied Mathematical Research, **3**(1) (2013), https://doi.org/10.14419/ijamr.v3i1.1712.

Cameron, P. J. dan Ghosh, S., *The power graph of a finite group*, Discrete Mathematics, **311**(13) (2011), 1220–1222, https://doi.org/10.1016/j.disc.2010.02.011

Chakrabarty, I., Ghosh, S., & Sen, M. K. (2009). Undirected power graphs of semigroups. *Semigroup Forum*, *78*(3), 410–426. https://doi.org/10.1007/s00233-008-9132-y

Dummit, D. dan Foote, R. M., *Abstract Algebra*, 3rd Edition, Wiley, 2004.

Febriantono, A., Munandar, A., dan Ramadhan, M. R., *Sifat-sifat Graf Irisan Pada Grup Dihedral*, Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM), **8**(1) (2024), 29–38, https://doi.org/https://doi.org/10.26740/jram.v8n1.p29-38.

Gallian, J. A., *Contemporary Abstract Algebra*, In Contemporary Abstract Algebra, 2013.

Kelarev, A. V. dan Quinn, S. J., *Directed Graphs and Combinatorial Properties of Semigroups*, Journal of Algebra, **251**(1) (2002), 16–26, https://doi.org/10.1006/jabr.2001.9128.

Luo, Y., Hao, Y., dan Clarke, G. T., *On the Cayley Graphs of Completely Simple Semigroups*, Semigroup Forum, **82**(2) (2011), 288–295, https://doi.org/10.1007/s00233-010-9267-5.

Ma, X., Wei, H. dan Yang, L., *The Coprime Graph of A Group*, International Journal of Group Theory, **3**(3) (2014), 13–23.

Munandar, A., G*raf Order Elemen: Representasi Baru Grup pada Graf*, Konvergensi, **9**(1) (2022a), 1–7, https://doi.org/http://dx.doi.org/10.26555/konvergensi.v9i1.24201.

Munandar, A., *Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf, In Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf*, Deepulish, 2022b.

Munandar, A., *Some Properties on Coprime Graph of Generalized Quaternion Groups,* BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan, **17**(3) (2023), 1373–1380, https://doi.org/10.30598/barekengvol17iss3pp1373-1380.

Sattanathan, M. dan Kala, R., *An Introduction to Order Prime Graph*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, **4**(10) (2009), 467–474.

Wang, S. F., *A Problem on Generalized Cayley Graphs of Semigroups*, Semigroup Forum, **86**(1) (2013), 221–223, https://doi.org/10.1007/s00233-012-9407-1.