Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP)
Vol. 16 No. 2, Desember 2024, hal. 85-106
ISSN (Cetak) : 2085-1456; ISSN (*Online*) : 2550-0422

BEBERAPA SIFAT HUBUNGAN ANTARA LINGKARAN DAN ELIPS MENGGUNAKAN TRANSFORMASI KOORDINAT

Harun Abdul Rohman*

SMPN 2 Cilengkrang, Kabupaten Bandung, Jawa Barat, Indonesia
harunrohman67@guru.smp.belajar.id

ABSTRACT. *The relationship between an ellipse and a circle is an interesting topic to study. An ellipse is the result of a transformation from a circle. This study aims to establish the relationship between an ellipse and a circle that shares the same center through coordinate transformations. Based on the results of this study, I derived several theorems about 1) several properties related to coordinate transformation between an ellipse and a circle, 2) the relationship between the area of a polygon in an ellipse and a polygon in a circle, and 3) the relationship between the area of an ellipse and a circle.*

***Keywords*: :** *coordinate transformation, circle dilation, polygon in the ellipse, area of the ellipse, the area of polygon inscribed in an ellipse.*

ABSTRAK. Hubungan antara elips dan lingkaran adalah topik yang menarik untuk dipelajari. Elips adalah hasil transformasi dari lingkaran. Penelitian ini bertujuan untuk menemukan hubungan antara elips dan lingkaran dengan pusat yang sama melalui transformasi koordinat. Berdasarkan hasil penelitian ini, saya menurunkan beberapa teorema tentang 1) beberapa sifat yang terkait dengan transformasi koordinat antara elips dan lingkaran, 2) hubungan antara luas poligon dalam elips dan poligon dalam lingkaran, dan 3) hubungan antara luas elips dan lingkaran.

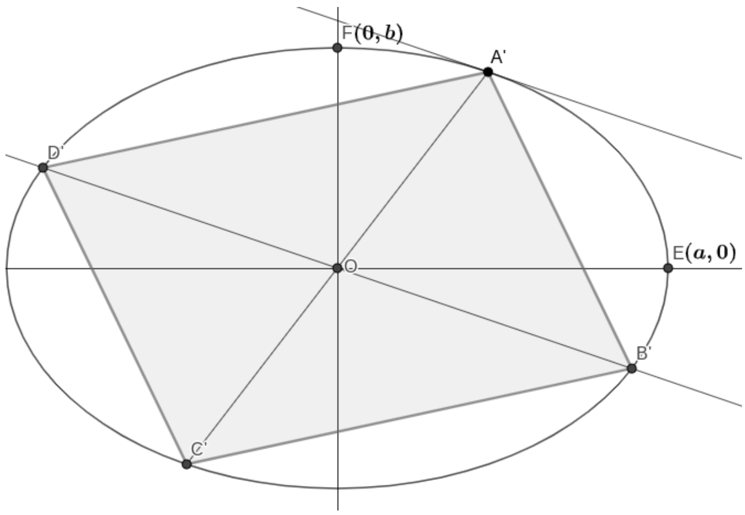
Kata Kunci: transformasi koordinat, dilatasi lingkaran, poligon dalam elips, luas elips, luas poligon dalam elips.

1. PENDAHULUAN

Hubungan antara elips dan lingkaran adalah topik yang menarik untuk dibahas. Beberapa penelitian sebelumnya telah menunjukkan hubungan antara lingkaran dan elips. Elips adalah lingkaran yang direntangkan baik secara vertikal maupun horizontal (Lockhart, 2012; Rohman, 2024; Scimone, 2015). Peregangan ini dapat dijelaskan dengan menggunakan konsep Transformasi Affine atau pelebaran koordinat (Barnard dkk., 2001; Hilbert & Cohn-Vossen, 1991; Pfiefer, 1988; Rohman, 2022). Dengan menggunakan transformasi koordinat, kita juga dapat mengatakan bahwa elips yang memiliki panjang yang sama dengan sumbu mayor dan minor adalah lingkaran.

*Penulis Korespondensi
Info Artikel : dikirim 6 September 2024; direvisi 9 Desember 2024; diterima 18 Desember 2024.

Salah satu kegunaan hubungan antara elips dan lingkaran adalah untuk menemukan luas elips, sifat trigonometri, dan luas poligon. Misalnya, luas elips adalah pelebaran luas lingkaran. Contoh lain dari luas segitiga dalam elips adalah pelebaran luas segitiga dalam lingkaran (Rohman & Jupri, 2019). Beberapa contoh lain adalah mencoba menemukan keliling elips. Namun, tidak mungkin menemukan keliling elips menggunakan konsep pelebaran. Beberapa penelitian sebelumnya hanya menunjukkan perkiraan dan batas keliling elips, seperti dalam artikel (Barnard dkk., 2001; Jameson, 2014; Pfiefer, 1988; Soltani, 2022).



Gambar 1. Jajaran genjang dalam elips

Luas segitiga dan poligon pada elips juga telah dipelajari jauh sebelumnya oleh Apollonius. Namun, teorema Apolonius terbatas pada segitiga yang membentuk poligon dalam bentuk jajaran genjang. Apollonius telah menemukan bahwa luas jajargenjang yang sisi-sisinya menyinggung elips memiliki luas $4ab$ dengan a dan b masing-masing merupakan panjang sumbu setengah mayor dan minor. Teorema ini lebih dikenal dengan teorema konjugat diameter.

Teorema yang sama dengan Apollonius dibuktikan oleh Ara (Ara, 2013) dengan menggunakan metode pembuktian yang berbeda. Ara membuktikan luas segitiga yang membentuk jajar genjang dalam elips masing-masing luasnya adalah

$(1/2)ab$. Sehingga luas maksimum jajar genjang dalam elips yaitu $2ab$. Luas jajar genjang ini telah ditemukan oleh Apollonius jauh sebelumnya (Baltus, 2020).

Dalam penelitian lain, Rohman dan Jupri telah terbukti bahwa poligon dalam elips adalah poligon yang melebar dalam lingkaran (Rohman & Jupri, 2019) . Pelebaran luas poligon ini dapat diturunkan sebagai kombinasi dari luas segitiga dalam elips, di mana luas segitiga elips adalah pelebaran segitiga dalam lingkaran. Namun, penelitian ini hanya mencakup luas poligon reguler dalam lingkaran yang diperluas menjadi poligon dalam elips. Tujuan memilih poligon reguler ini adalah untuk mencari luas elips menggunakan pendekatan poligon reguler dalam lingkaran.

Pada artikel ini, saya akan menyajikan hubungan luas poligon dalam elips dengan luas poligon dalam lingkaran, baik untuk poligon beraturan maupun tidak beraturan. Poligon elips dalam elips merupakan hasil dari peregangan poligon dalam lingkaran, di mana lingkaran tersebut mengalami peregangan menjadi elips. Salah satunya Saya akan membuktikan luas maksimum jajargenjang dalam elips dengan metode yang berbeda dari yang ditemukan oleh Ara (Ara, 2013), yaitu menggunakan hubungan luas poligon dalam elips dengan poligon dalam lingkaran untuk membuktikannya. Selain itu saya akan membuktikan luas elips dengan menggunakan pendekatan poligon dalam elips, sedangkan poligon dalam elips merupakan hasil peregangan dari poligon dalam lingkaran (Rohman & Jupri, 2019).

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada artikel ini, saya menggunakan simbol yang sudah umum digunakan. Misalnya, segmen AB dilambangkan dengan $\overline{AB}$ dan panjang segmennya adalah $m\overline{AB}$. Ukuran sudut ABC dilambangkan $m\angle ABC$. luas daerah bangun datar $FGHI$ dilambangkan $A(FGHI)$, luas poligon P dilambangkan $A(P)$, luas lingkaran dilambangkan A, dan luas elips dilambangkan A' . Juga, saya menggunakan singkatan untuk setiap persamaan, misalnya, Persamaan 1 ditulis sebagai Pers (1).

2.1 Hasil

Ada tiga topik dalam penelitian ini. Setiap topik memiliki hubungan dengan yang lain. Setiap rumus dari topik ini dibahas di bagian berikutnya. Topik-topik ini adalah 1) beberapa sifat yang terkait dengan transformasi koordinat antara elips dan lingkaran, 2) hubungan antara luas poligon dalam elips dan poligon dalam lingkaran, dan 3) hubungan antara luas elips dan lingkaran.

2.1.1 Beberapa Sifat yang Terkait dengan Transformasi Koordinat antara Elips dan Lingkaran

Definisi 2.1. Transformasi lingkaran $x^2 + y^2 = b^2$ menjadi elips $(x'/b)^2 + (y'/a)^2 = 1$ dan sebaliknya memenuhi persamaan berikut

$$y' = \frac{a}{b} y \tag{1}$$

$$x' = x \tag{2}$$

dengan $b > 0$.

Kita dapat mengecek jika kita memasukkan pers (1) dan (2) ke dalam $(x'/b)^2 + (y'/b)^2 = 1$ kemudian didapatkan

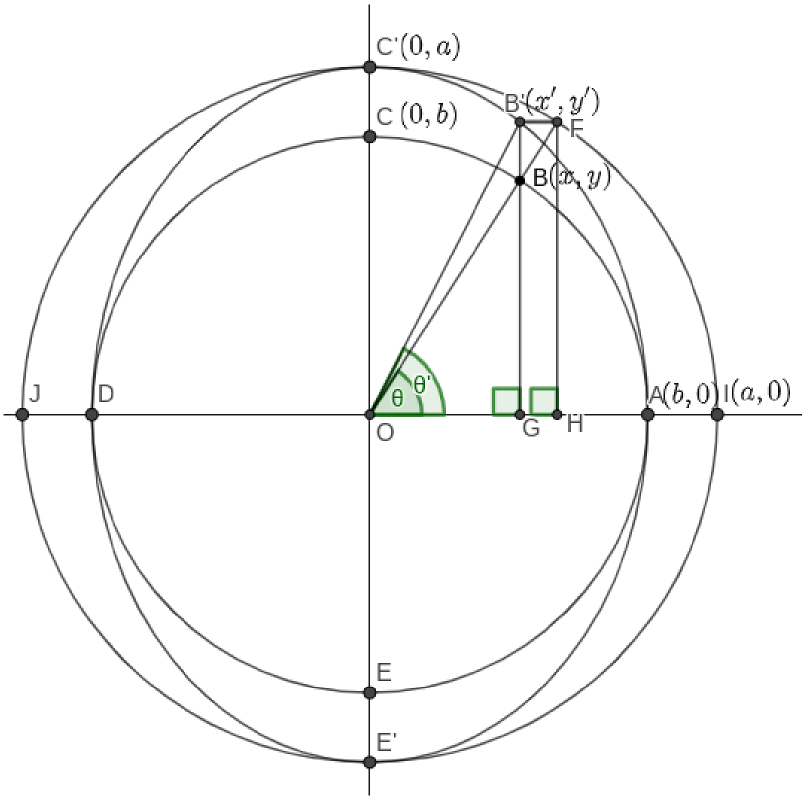
$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{\frac{a}{b} y}{b}\right)^2 = 1$$

kita sederhanakan hasil tadi diperoleh

$$x^2 + y^2 = b^2$$

Dengan cara yang saman, jika kita masukan $y = (b/a)y'$ and $x' = x$ ke dalam $x^2 + y^2 = b^2$ diperoleh $(x'/b)^2 + (y'/a)^2 = 1$.

Berdasarkan definisi, jika $a \neq b$ maka terdapat dua kemungkinan $a > b$ dan $a < b$. Jika kita menggambar lingkaran $x^2 + y^2 = b^2$ dan elips $(x/b)^2 + ((a/b)y/b)^2 = 1$ untuk $a > b$, maka lingkaran berada di dalam elips. Sebaliknya, untuk $a < b$, lingkaran berada di luar elips. Terakhir, untuk $a = b$ maka lingkaran dan elips berimpit membentuk lingkaran.



Gambar 2. Lingkaran diubah menjadi elips

Teorema 2.1. Misalkan $B(x,y)$ pada $x^2+y^2=b^2$ ditransformasikan menjadi $B'(x',y')$ pada $(x'/b)^2+(y'/a)^2=1$. Titik B dan B' keduanya tegak lurus terhadap $G(x',0)$. Jika $m\angle BOG=\theta$ dan $m\angle B'OG'=\theta'$ maka

a. $\tan\theta' = \frac{a}{b}\tan\theta$

b. $\sin\theta' = \frac{a\ \sin\theta}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}$

c. $\cos\theta' = \frac{b\cos\theta}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}$

di mana $b>0$.

1) Bukti. Akan dibuktikan Teorema 2.1 bagian a yaitu

$$\tan\theta' = \frac{a}{b}\tan\theta$$

Perhatikan Gambar 2. Lingkaran *IC'JE'* dengan jari-jari a. Kita dapatkan $\overline{B'G}$ sejajar terhadap $\overline{FH}$, maka $m\overline{B'G}=m\overline{FH}$. Berdasarkan elips $AC'DE'$ dan pers (2), kita dapatkan

$$y' = m\overline{OF}\sin\theta \tag{3}$$

$$x' = m\overline{OB}\sin\theta \tag{4}$$

karena $m\overline{OF} = a$ dan $m\overline{OB} = b$ maka pers (2) dan (3) menjadi

$$y' = a\sin\theta \tag{5}$$

$$x' = b\cos\theta \tag{6}$$

Sementara itu dari $x^2 + y^2 = b^2$, kita dapatkan

$$y = b\sin\theta \tag{7}$$

$$x = b\cos\theta \tag{8}$$

Dari pers (1) dan (2), kita dapatkan

$$\frac{y'}{x'} = \frac{a}{b}\frac{y}{x} \tag{9}$$

Karena $y'/x' = \tan\theta'$ dan $y/x = \tan\theta$ maka pers (9) dapat dituliskan sebagai

$$\tan\theta' = \frac{a}{b}\tan\theta \tag{10}$$

□

2) Bukti. Kita akan membuktikan Teorema 2.1 bagian b yaitu

$$\sin\theta' = \frac{a\sin\theta}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}$$

Perhatikan Gambar 2, kita dapatkan $\sin\theta' = y'/(\sqrt{x'^2 + y'^2}$, dengan memasukan pers (1) dan (2) kita dapatkan

$$\sin\theta' = \frac{\frac{a}{b}y}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{b}y\right)^2}}$$

Karena pers (7), yaitu $y = b\sin\theta$, dan pers (8), yaitu $x = b\cos\theta$, maka

$$\sin\theta' = \frac{\frac{a}{b}b\sin\theta}{\sqrt{(b\cos\theta)^2 + \frac{a}{b}(b\sin\theta)^2}}$$

Kita dapat menyederhanakannya menjadi

$$\sin\theta' = \frac{a\sin\theta}{\sqrt{(b\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2}} \tag{11}$$

□

3) Bukti. Akan dibuktikan Teorema 2.1 bagian c yaitu

$$\cos\theta' = \frac{b\cos\theta}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}$$

Perhatikan gambar, kita dapatkan $\cos\theta' = x'/\sqrt{x'^2 + y'^2}$, kemudian kita masukan pers (1) dan (2) diperoleh

$$\cos\theta' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{b}y\right)^2}}$$

Karena pers (7), yaitu $y = b\sin\theta$, dan pers (8), yaitu $x = b\cos\theta$, maka kita peroleh

$$\cos\theta' = \frac{b\cos\theta}{\sqrt{(b\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2}} \tag{12}$$

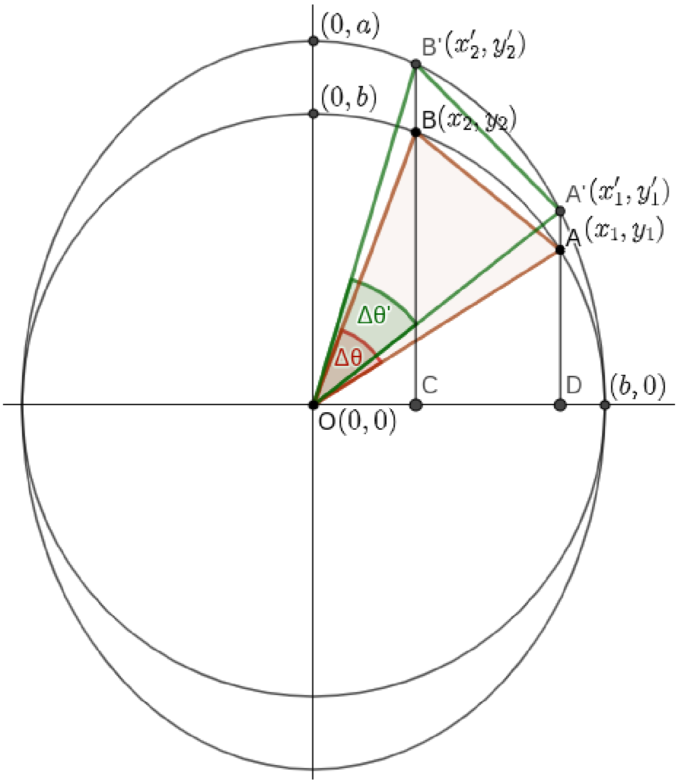
□

2.1.2 Hubungan antara Luas Segitiga dalam Lingkaran dan Elips

Teorema 2.2. Misalkan lingkaran $x^2 + y^2 = b^2$ditransformasikan menjadi $(x'/b)^2 + (y'/a)^2 = 1$, keduanya memiliki pusat yang sama di $O(0,0)$. Segitiga *AOB* dengan titik *A* dan *B* pada lingkaran, sedangkan segitiga $A'OB'$ dengan titik *A*′ dan *B*′ pada elips. Jika *A* dan *B* masing-masing ditransformasikan menjadi *A*′ dan *B*′, maka hubungan luas segitiga *AOB* dengan luas segitiga $A'OB'$ yaitu

$$A(\Delta A'OB') = \frac{b}{a}\,A(\Delta AOB)$$

di mana $a > 0$, dengan $A(\Delta A'OB')$ dan $A(\Delta AOB)$ masing-masing adalah luas segitiga $A'OB'$ dan AOB.



Gambar 3. Transformasi ΔAOB **menjadi** $\Delta A'OB$

Bukti. Terdapat dua segitiga pada Gambar 3, yaitu ΔAOB dalam lingkaran dan $\Delta A'OB'$ dalam elips. Perhatikan Gambar 3, lingkaran $x^2 + y^2 = b^2$ ditransformasikan menjadi elips $(x'/b)^2 + (y'/a)^2 = 1$. kita dapatkan juga transformasi yaitu

$$\Delta AOB \;\rightarrow\; \Delta A'OB' \tag{13}$$

Dengan titik-titik yang bersesuaiannya adalah

$$A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x_1', y_1') \tag{14}$$

$$A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x_2', y_2') \tag{15}$$

dan juga

$$\angle DOA \rightarrow \angle DOA' \tag{16}$$

$$\angle DOB \rightarrow \angle DOB' \tag{17}$$

$$\angle AOB \rightarrow \angle A'OB' \tag{18}$$

Berdasarkan per (1) dan (2), kita dapat menuliskan pers (14) dan (13) sebagai

$$x_1' = x_1 \text{ dan } y_1' = \frac{a}{b} y_1 \tag{19}$$

$$x_2' = x_2 \text{ dan } y_2' = \frac{a}{b} y_2 \tag{20}$$

Jika $m\angle DOB = \theta_2$ dan $m\angle DOA = \theta_1$, serta $m\angle DOB' = \theta_2'$ dan $m\angle DOA' = \theta_1'$ maka kita dapatkan

$$m\angle AOB = \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \tag{21}$$

$$m\angle A'OB' = \Delta\theta = \theta_2' - \theta_1' \tag{22}$$

Langkah selanjutnya adalah mencari luas daerah ΔAOB dan $\Delta A'OB$ dan hubungan keduanya.

Luas Daerah $\triangle\ AOB$

Perhatikan kembali Gambar 3. Terdapat $\triangle\ AOB$, jika alasnya adalah $\overline{OA}$ sedangkan tingginya adalah $\overline{OB}.\sin\Delta\theta$, maka kita dapatkan luas ΔAOB adalah

$$\triangle\ AOB = \frac{1}{2} m\overline{OA}.\, m\overline{OB}.\sin\Delta\theta \tag{23}$$

Karena $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, maka

$$\triangle\ AOB = \frac{1}{2} m\overline{OA}.\, m\overline{OB}.\sin(\theta_2 - \theta_1) \tag{24}$$

Karena $m\overline{OA} = m\overline{OB} = b$, di mana b adalah jari-jari lingkaran. Pers (23) dituliskan sebagai

$$\triangle\ AOB = \frac{1}{2} b^2.\sin(\theta_2 - \theta_1) \tag{25}$$

Karena

$$\sin(\theta_2 - \theta_1) = \sin\theta_2 . \cos\theta_1 - \cos\theta_2 . \sin\theta_1 = \sin\theta_1 . \sin\theta_2 \,(\cot\theta_1 - \cot\theta_2)$$

maka pers (25) bisa dituliskan

$$\triangle\ AOB = \frac{1}{2} b^2.\sin\theta_1 . \sin\theta_2 \,(\cot\theta_1 - \cot\theta_2) \tag{26}$$

Luas Daerah $\triangle\ A'OB'$

Perhatikan kembali Gambar 3. Terdapat $\triangle\ A'OB'$, jika alasnya adalah $\overline{OA}'$ sedangkan tingginya adalah $\overline{OB'}.\sin\Delta\theta'$, maka kita dapatkan luas $\triangle\ A'OB'$ adalah

$$\Delta A'OB' = \frac{1}{2} m\overline{OA}.\, m\overline{OB'}.\sin\Delta\theta' \tag{27}$$

Karena $\Delta\theta' = \theta_2' - \theta_1'$, maka

$$\triangle\ A'OB' = \frac{1}{2} m\overline{OA'}.\, m\overline{OB'}.\sin(\theta_2' - \theta_1') \tag{28}$$

Karena

$\sin(\theta_2' - \theta_1') = \sin\theta_2' . \cos\theta_1' - \cos\theta_2' . \sin\theta_1' = \sin\theta_1' . \sin\theta_2' \, (\cot\theta_1' - \cot\theta_2'),$

maka pers (28) menjadi

$$\triangle A'OB' = \frac{1}{2} m\overline{OA'} . m\overline{OB'} . \sin\theta_1' . \sin\theta_2' \, (\cot\theta_1' - \cot\theta_2') \tag{29}$$

Dengan menggunakan sifat komutatif diperoleh

$$\triangle A'OB' = \frac{1}{2} . m\overline{OA'} . \sin\theta_1' . m\overline{OB'} . \sin\theta_2' \, (\cot\theta_1' - \cot\theta_2') \tag{30}$$

Hubungan Luas Daerah ΔAOB dengan Luas Daerah $\Delta A'OB'$

Perhatikan Gambar 3, Berdasar $\Delta A'OB'$ kita dapatkan

$$y_1{}' = m\overline{OA'} . \sin\theta_1' \tag{31}$$

$$y_2{}' = m\overline{OB'} . \sin\theta_2' \tag{32}$$

Berdasarkan pers (19) yaitu $y_1{}' = \frac{a}{b} y_1$ dan karena $y_1 = b\sin\theta_1$ maka

$$y_1{}' = \frac{a}{b} b\sin\theta_1 \tag{33}$$

dan $y_2{}' = (a/b)y_2$. Karena $y_2 = b\sin\theta_2$ maka

$$y_2' = \frac{a}{b}\, b\sin\theta_2 \tag{34}$$

Dengan memasukan pers (31) ke pers (33) dan pers (32) ke pers (34), Kita dapatkan

$$m\overline{OA'} . \sin\theta_1' = \frac{a}{b} b\sin\theta_1 \tag{35}$$

$$m\overline{OB'} . \sin\theta_2' = \frac{a}{b} b\sin\theta_2 \tag{36}$$

Kita masukan pers (35) dan (36) ke pers (30), kita dapatkan

$$A(\triangle A'OB') = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} b\sin\theta_1\right)\left(\frac{a}{b} b\sin\theta_2\right)(\cot\theta_1' - \cot\theta_2') \tag{37}$$

Karena $\tan\theta' = \frac{a}{b}\tan\theta$, lihat pers (10), maka kita dapatkan

$$\cot\theta' = \frac{b}{a}\cot\theta,$$

sehingga kita dapatkan

$$\cot\theta_1' = \frac{b}{a}\cot\theta_1 \text{ , dan} \tag{38}$$

$$\cot\theta_2' = \frac{b}{a}\cot\theta_2$$

Kita masukan pers (38) ke pers (37), sehingga diperoleh

$$A(\triangle A'OB') = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}b\sin\theta_1\right)\left(\frac{a}{b}b\sin\theta_2\right)\left(\frac{b}{a}(\cot\theta_1 - \cot\theta_2\right) \quad (39)$$

atau

$$A(\triangle A'OB') = \frac{a}{b}\frac{1}{2}b^2(\sin\theta_1)(\sin\theta_2)(\cot\theta_1 - \cot\theta_2) \quad (40)$$

Berdasarkan pers (26) yaitu $A(\triangle AOB) = \frac{1}{2}b^2(\sin\theta_1)(\sin\theta_2)(\cot\theta_1 - \cot\theta_2)$ maka pers (40) bisa dituliskan

$$A(\triangle A'OB) = \frac{a}{b}A(\triangle A'OB) \quad (41)$$

□

2.1.3 Hubungan Antara Luas Poligon dalam Elips dengan Luas Poligon dalam Lingkaran

Teorema 2.3. Misalkan lingkaran $x^2 + y^2 = b^2$ ditransformasikan menjadi elips $(x'/b)^2 + (y'/a)^2 = 1$, keduanya memiliki pusat yang sama di $O(0,0)$. Terdapat poligon *P* dalam lingkaran yang titik-titik sudutnya pada lingkaran. Jika poligon *P* ditransformasikan menjadi *P'*, di mana *P'* adalah poligon dalam elips, maka luas poligon dalam elips adalah

$$A(P)' = \frac{a}{b}A(P)$$

di mana $b > 0$.

Bukti. Ketika poligon *P* dibagi menjadi beberapa segitiga melalui titik-titik sudut poligon yang bertemu titik pusat *O*. Sebagai contoh seperti poligon yang terlihat pada Gambar 4 di bawah. Segitiga-segitiga tersebut kemudian ditransformasikan menjadi poligon *P'*. Jika segitiga pada poligon *P* adalah *T* dan segitiga pada poligon *P'* adalah *T'*, maka kita dapat menyatakan luas poligon *P* dalam lingkaran sebagai jumlah luas segitiga sebanyak *n* buah yaitu

$$A(P) = \sum_{i=1}^{n} A(T_n) = A(T_1) + A(T_2) + A(T_3) + \ldots + A(T_{n-1}) + A(T_n)$$

dengan $A(T)$ adalah luas segitiga *T*.

Sementara itu luas daerah poligon *P'* dalam elips adalah jumlah luas daerah *n* segitiga pada elips, yaitu

$$A(P') = \sum_{i=1}^{n} A(T_n{}') = A(T_1{}') + A(T_2{}') + A(T_3{}') + \ldots + A(T_{n-1}{}') + A(T_n{}')$$

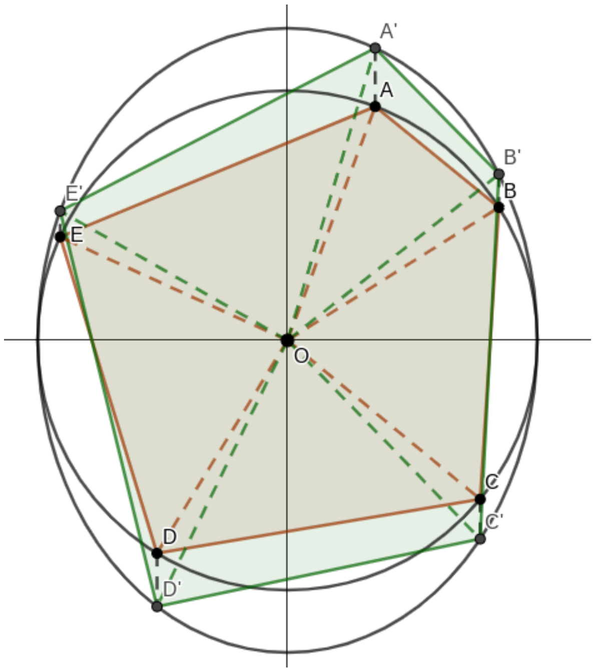
dengan $A(T')$ adalah luas segitiga *T'*. Berdasarkan Teorema 2.2, kita dapatkan $A(T') = (a/b)\,A(T)$. Sehingga luas poligon *P'* dapat dituliskan

$$A(P') = \sum_{i=1}^{n} A(T_n{}') = \frac{a}{b}\left(A(T_1) + A(T_2) + A(T_3) + \ldots + A(T_{n-1}) + A(T_n)\right)$$

Kita sederhanakan menjadi

$$A(P') = \frac{a}{b} A(P) \tag{42}$$

□



Gambar 4. Transformasi poligon $ABCDE$ ke poligon $A'B'C'D'E'$

Contoh 2.1. Pada Gambar 4, sebuah poligon $ABCDE$ dalam lingkaran mengalami dilatasi menjadi poligon $A'B'C'D'$ dalam elips. Lingkaran memiliki jari-jari panjang *b*, sedangkan elips memiliki panjang *a* dan *b*, yang masing-masing merupakan sumbu semi-mayor dan semi-minor. Dengan menggunakan pers (22), kita dapat menghitung luas daerah poligon $A'B'C'D'$ adalah

$$A(A'B'C'D'E') = \frac{a}{b} A(ABCDE)$$

dengan $A(ABCDE)$ adalah luas poligon $ABCDE$

2.1.4 Hubungan Antara Luas Elips dengan Luas Lingkaran

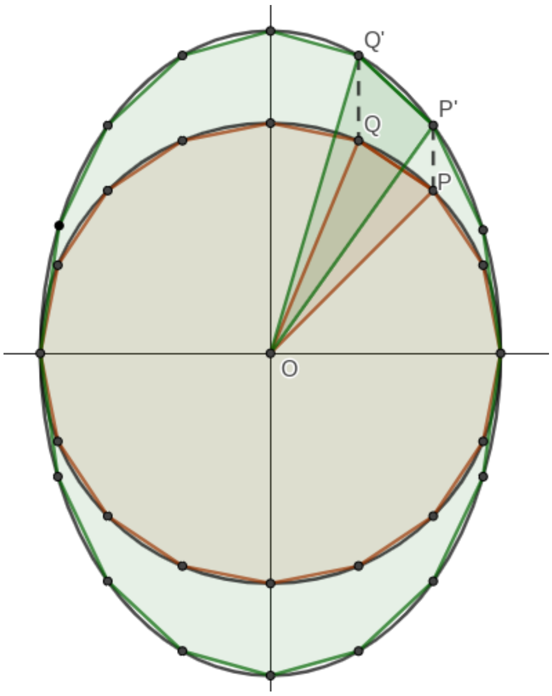
Teorema 2.4. Misalkan lingkaran $x^2 + y^2 = b^2$ ditransformasikan menjadi elips $(x'/b)^2 + (y'/a)^2 = 1$. Jika A adalah luas lingkaran dan A' adalah luas elips maka

$$A' = \frac{a}{b} A$$

di mana $b > 0$.

Bukti. Perhatikan Gambar 5**,** kita dapat memperkirakan luas lingkaran dengan menggunakan poligon reguler n (n-gon) dalam lingkaran dengan sisinya sebanyak n. Saat jumlah sisi poligon mendekati tak terbatas $n \to \infty$, luasnya mendekati lingkaran. Kita dapat merepresentasikan luas lingkaran sebagai

$$A = A(n\text{-}gon), \text{ dengan } n \to \infty \qquad (43)$$



Gambar 5. Poligon beraturan di dalam lingkaran

Jika lingkaran $x^2 + y^2 = b^2$ ditransformasikan menjadi elips $(x'/b)^2 + (y'/a)^2 = 1$, ini berarti kita harus membuktikan bahwa lingkaran mengalami dilatasi sebesar a/b, maka *A*(*n-gon*)=*A* mengalami dilatasi sebesar a/b menjadi *A*(*n-gon*)'=*A'*.

Perhatikan Gambar 5, $\triangle POQ = T$ ditransformasikan menjadi $\Delta P'OQ' = T'$ yang merupakan salah satu segitiga yang membentuk poligon dalam lingkaran dan elips. Berdasarkan teorema 2.2, kita dapatkan hubungan luas *T* dan *T'* sebagai berikut

$$A(T') = \frac{a}{b}A(\mathrm{T}) \tag{44}$$

Jika terdapat segitiga sebanyak *n* yang membentuk poligon dalam lingkaran, maka kita dapat menuliskan hubungan luas poligon dalam elips dan lingkaran sebagai

$$\sum_{i=1}^{n} A(T_n') = \frac{a}{b}\sum_{i=1}^{n} A(T_n) \tag{45}$$

Ketika $n \to \infty$ maka kita dapat menyatakan luas poligon untuk menghampiri luas elips (*A'*) dan luas lingkaran (*A*) adalah

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(T_n') = \frac{a}{b}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(T_n) \tag{46}$$

Kita dapat tulikan sebagai

$$A' = \frac{a}{b}A$$

di mana $b > 0$.

Bukti $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(T_n) = A$

Untuk membuktikan penghampiran luas elips (A'), kita cukup membuktikan bahwa $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(T_n) = A$, di mana A adalah luas lingkaran. Pembuktian luas lingkaran dengan penghampiran poligon ini sudah pernah dilakukan oleh Archimedes (Purcel & Varberg, 2005).

Perhatikan Gambar 5, $\triangle POQ = T$ mempunyai $m\angle POQ = 2\pi/n$, panjang alas yaitu $m\overline{OP} = b$, dan tingginya yaitu $t = m\overline{OQ}.\sin(2\pi/n) = b\ \sin(2\pi/n)$. Luas *T* yaitu

$$A(T) = \frac{1}{2}b.b\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}b^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \tag{47}$$

Kita dapat menghitung luas lingkaran sebagai luas poligon beraturan dalam lingkaran yang tersusun oleh sejumlah n segitiga T yang kongruen ketika $n \to \infty$. Luas lingkaran (A) yaitu

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(T_n) = \lim_{n\to\infty} n.A(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} b^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \tag{48}$$

Kalikan pers (48) dengan $(2\pi/n)/(2\pi/n)$, diperoleh

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(T_n) = \pi b^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n} \tag{49}$$

Misal $p = 2\pi/n$, ketika $n \to \infty$ maka $p \to 0$. Karena itu,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 2\pi/n}{2\pi/n} = \lim_{n\to 0} \frac{\sin(p)}{p} = 1,$$

sehingga pers (49) menjadi

$$A = \pi b^2 \tag{50}$$

Kita dapat menuliskan kembali pers (46) untuk luas elips (A') menjadi

$$A' = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(T_n) = \frac{a}{b} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(T_n)$$

Karena telah terbukti $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(T_n) = A = \pi b^2$, maka luas elips adalah

$$A' = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(T_n) = \frac{a}{b} A \tag{51}$$

□

Kita dapat juga menuliskan pers (51) menjadi $A' = \pi ab$ sesuai dengan pembuktian yang pernah dilakukan oleh Archimedes (Archimedes, 2010).

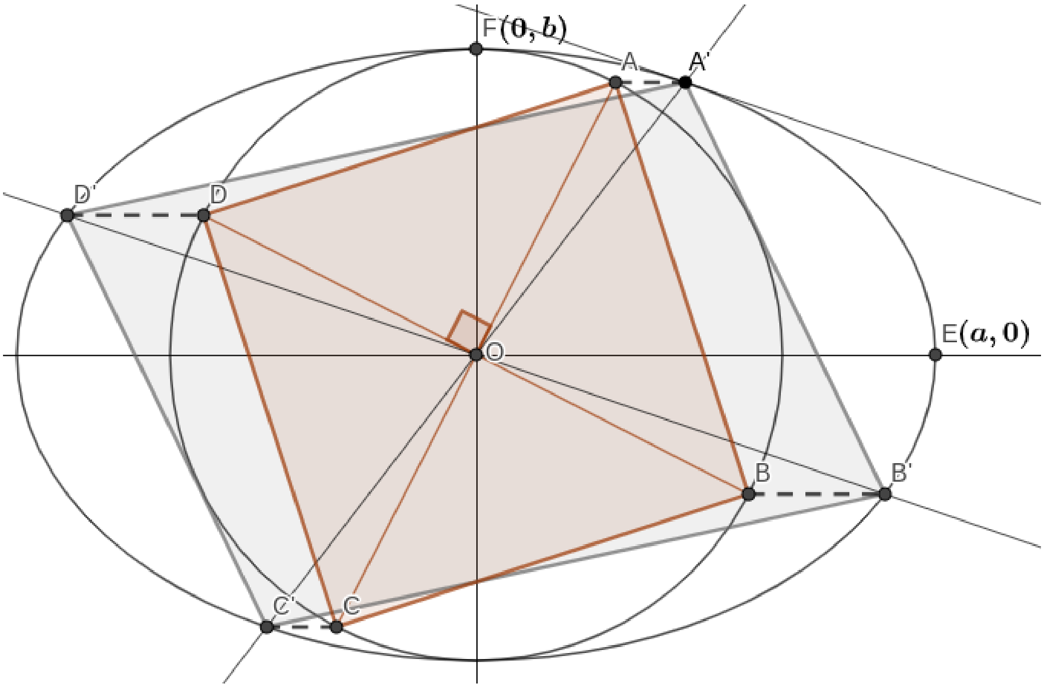
2.2 Pembahasan

Teorema Apolonius berhubungan dengan hasil penelitian ini. Keduanya mempelajari luas poligon yang terdiri dari segitiga. Kita harus bisa menghubungkan keduanya. Teorema Apolonius memperoleh rumus jajaran genjang. Artikel ini memperoleh rumus untuk semua jenis poligon. Kita harus dapat membuktikan Teorema Apolonius menggunakan transformasi koordinat. Lihat Gambar 6. Luas jajargenjang $A'B'C'D'$ menurut teorema Apolonius adalah

$2ab$. Pertimbangkan $ABCD$ persegi panjang yang berubah menjadi jajaran genjang $A'B'C'D'$. Dengan menerapkan pers (42), kita mendapatkan hasilnya

$$A(A'B'C'D') = \frac{a}{b}A(ABCD) = 2ab,$$

sehingga, kita dapatkan $A(ABCD) = 2b^2$.



Gambar 6. Transformasi persegi *ABCD* menjadi jajaran genjang *A'B'C'D'*

Perhatikan jajargenjang $A'B'C'D'$ pada Gambar 6 di atas. Jajargenjang itu merupakan jajargenjang yang diagonal-diagonalnya sejajar dengan garis singgung elips di titik-titik sudut jajargenjang. Diagonal-diagonal ini dikenal dengan nama konjugat diameter. Perhatikan bahwa garis singgung di titik A sejajar dengan diameter $\overline{B'D'}$. Jika kita buat garis singgung di titik B' maka garis singgung itu sejajar dengan diameter $A'C'$. Ara (Ara, 2013) yang telah membuktikan bahwa

$$A(\triangle A'OD') = A(\triangle A'OB') = \frac{ab}{2}$$

Perhatikan bahwa $\triangle A'OD'$ ditransformasikan menjadi $\triangle AOD$, dan $\triangle A'O'B$ ditransformasikan menjadi $\triangle AOB$.

Secara sederhana kita dapat membuktikan bahwa $A(\triangle A'OD') = A(\triangle A'OB')$. Perhatikan bahwa kedua segitiga tersebut mempunyai panjang alas dan tinggi yang sama. Panjang alasnya yaitu $m\overline{OD'} = m\overline{OB'}$ dan tingginya yaitu jarak titik A' terhadap $\overline{B'D'}$. Namun, pembuktian lengkap untuk sampai kepada kesimpulan bahwa kedua segitiga itu mempunyai luas yang sama yaitu $ab/2$ bisa dilihat pada artikel Ara (Ara, 2013).

Berdasarkan pers (45), kita dapatkan menuliskan luas $\triangle A'OD'$ sebagai $A(\triangle A'OD') = (a/b)\, A(\triangle AOD)$. Karena $A(\triangle A'OD') = ab/2$ maka $A(\triangle AOD) = b^2/2$. Selanjutnya, karena $A(\triangle AOD) = A(\triangle AOB)$, maka kita dapatkan juga $A(\triangle AOB) = b^2/2$. Sehingga kita dapatkan bahwa luas persegi dalam lingkaran yaitu $A(ABCD) = 2b^2$. Tetapi kita harus memberikan bukti tambahan untuk menunjukkan bahwa bentuk *ABCD* adalah persegi, dan *AOB* merupakan segitiga siku-siku.

Sebagai contoh, kita tahu bahwa luas persegi dalam lingkaran adalah $2b^2$, ketika lingkaran ditransformasikan menjadi elips dengan skala a/b maka kita dapatkan luas persegi menjadi $(a/b)2b^2 = 2ab$ yang merupakan luas jajargenjang. Luas $2ab$ ini adalah luas untuk jajargenjang diagonal-diagonalnya sejajar dengan garis singgung elips di titik-titik sudut jajargenjang (Ara, 2013). Perhatikan gambar 6, bahwa persegi $ABCD$ posisinya bisa kita rotasikan, apakah untuk setiap posisi persegi bisa menjamin bahwa ketika ditransformasikan menjadi jajargenjang yang dimaksud. Oleh sebab itu kita perlu bukti tambahan.

Bukti tambahan ini menyangkut transformasi titik-titik sudut yang bersesuaian pada jajargenjang $A'B'C'D'$ menjadi titik-titik sudut pada persegi $ABCD$ yang harus sesuai dengan definisi transformasi elips menjadi lingkaran. Transformasi titik yaitu $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$, dan $D \to D'$, sedemikian sehingga hasil transformasi titik-titik sudut pada jajargenjang $A'B'C'D'$ mengakibatkan segiempat *ABCD* memiliki semua sisi yang sama panjang.

Selanjutnya, kita harus memvalidasi kebalikannya: jika *ABCD* adalah persegi, maka *A'B'C'D'* membentuk jajaran genjang. Jika kita berhasil membuktikannya, kita dapat menetapkan bukti Teorema Apolonius melalui transformasi poligon.

Salah satu teorema lain yang perlu dibuktikan adalah luas jajaran genjang yang berada di luar elips seperti pada Teorema Apollonios pada diameter konjugat (Ivanov, 2011). Teorema ini harus dapat dibuktikan dengan menggunakan transformasi lingkaran menjadi elips. Teorema ini bisa menjadi bahan studi selanjutnya.

Luas elips yang diperoleh dengan menggunakan aturan penjumlahan segitiga melalui transformasi koordinat menghasilkan hasil yang sama dengan yang diperoleh dengan menggunakan aturan integral dalam kalkulus. Dengan menggunakan kalkulus, kita mendapatkan hasil πab (Hass dkk., 2019; Morris & Stark, 2016). Namun demikian, ini adalah sebuah cara pandang baru. Khususnya luas segitiga dan jajargenjang yang mempunyai sisi sebanyak n dalam elips merupakan hasil dilatasi dari sebuah segitiga dan jajargenjang dalam lingkaran.

Archimedes membuktikan rumus yang sama untuk luas elips dengan transformasi koordinat. Archimedes memperkirakan luas elips dengan menggunakan poligon di dalamnya. Archimedes memperoleh poligon ini dari kombinasi beberapa trapesium (Edwards, 2012). Namun, penelitian ini berbeda dengan penelitian Archimedes, dalam penelitian ini menggunakan beberapa segitiga yang membentuk poligon dalam elips.

Selain pelebaran oleh a/b, besaran lain dapat memperluas luas poligon, seperti yang ditunjukkan dalam artikel ini. Beberapa jenis pelebaran mungkin melibatkan kombinasi peregangan vertikal dan horizontal. Misalnya, kita dapat melebarkan elips $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ secara vertikal dan horizontal menjadi lingkaran ($x'^2 + y'^2 = c^2$). Pelebaran vertikal adalah $x' = x(c/b)$, dan pelebaran horizontal adalah $y' = y(c/a)$ (Rohman, 2022).

3 KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan artikel ini dapat disimpulkan bahwa terdapat hubungan antara lingkaran dan elips melalui transformasi koordinat. Beberapa sifat hubungan antara elips dan lingkaran adalah sifat trigonometri, luas poligon, dan luas elips.

Sifat-sifat ini selalu melibatkan faktor skala a/b, di mana a dan b adalah panjang sumbu semi mayor dan minor atau sebaliknya. Beberapa sifatnya adalah

1. Transformasi Lingkaran ke Elips

Elips dapat dianggap sebagai lingkaran yang diregangkan pada salah satu sumbunya. Transformasi ini mengubah ukuran sudut dan posisi titik pada lingkaran yang selalu melibatkan skala a/b.

2. Hubungan Luas Segitiga dan Poligon

Luas segitiga atau poligon dalam elips merupakan hasil pelebaran luas segitiga atau poligon dalam lingkaran dengan skala a/b. Sebagai contoh, luas segitiga $\Delta A'OB'$ dalam elips memiliki hubungan proporsional dengan luas segitiga ΔAOB dalam lingkaran sebesar a/b.

3. Hubungan Luas Lingkaran dan Elips

Elips memiliki luas yang setara dengan pelebaran luas lingkaran, yaitu $a/b\ (\pi b^2) = \pi ab$, di mana a adalah sumbu setengah mayor dan b adalah sumbu setengah minor.

4. Pembuktian Teorema Apollonius dengan Pendekatan Baru

Terakhir, penelitian ini juga mencoba membuktikan teorema konjugat diameter Apollonius, dengan pendekatan hubungan transformasi koordinat. Selain itu, pembuktian luas maksimum jajargenjang dalam elips yang sebelumnya ditemukan juga diperkuat melalui hubungan ini.

Penelitian ini hanya berpusat pada transformasi poligon dalam lingkaran menjadi poligon dalam elips. Penelitian berikutnya dapat mencari hubungan poligon luar lingkaran dengan poligon luar elips. Selain itu pembuktian luas maksimum jajaran genjang dalam elips yang merupakan transformasi persegi dalam lingkaran, perlu pembuktian tambahan secara koordinat bahwa persegi itu hasil transformasi jajargenjang atau sebaliknya.

UCAPAN TERIMAKASIH

Terima kasih kepada para penelaah dan editor yang telah memberikan saran masukan sehingga artikel ini layak terbit.

DAFTAR PUSTAKA

Ara, K., *A New Theorem Developed to Define the Property of Pair Conjugate Diameters of an Ellipse*, International Journal of Physics and Mathematical Sciences, **3**(2) (2103), 29-35.

Archimedes., *The works of Archimedes: Edited in Modern Notation with Introductory Chapters*, In *Cambridge library collection. Mathematics.* Cambridge University Press., 2010.

Baltus, C., *Collineations and Conic Sections An Introduction to Projective Geometry in its History,* Springer Nature Switzerland, 2020.

Barnard, R. W., Pearce, K., & Schovanec, L., *Inequalities for the Perimeter of an Ellipse*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **260**(2) (2001), 295–306.

Edwards, C. H. J., *The Historical Development of the Calculu*, Springer Science & Business Media, 2012.

Hass, J., Thomas, G. B., Heil, C., Weir, M. D., & Estrugo, J. L. Z., *Thomas' Calculus*, Pearson, 2019.

Hilbert, D., & Cohn-Vossen, S., *Geometry and The Imagination* (Second). AMS Chelsea Publishing, 1991.

Ivanov, A. B., *Apollonius theorem*. Encyclopedia of Mathematics, 2011. https://encyclopediaofmath.org/wiki/Apollonius_theorem, diakses pada 07 Desember 2024.

Jameson, G. J. O., *Inequalities for the perimeter of an ellipse*, The Mathematical Gazette, **98**(542) (2014), 227–234.

Lockhart, P., *Measurement*, The Belknap Press of Harvard University Pres., 2012.

Morris, Carla. C., & Stark, Robert. M., *Fundamentals of Calculus*. John Wiley & Sons, Inc, Massachusetts, 2016.

Pfiefer, R. E., *Bounds on the Perimeter of an Ellipse via Minkowski Sums*, The College Mathematics Journal, **19**(4) (1988), 348–350.

Purcel, Edwin. J., & Varberg, D., *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1*, Edisi Kelima, Erlangga, Jakarta, 2005.

Rohman, H. A., *Deriving the Exact Formula for Perimeter of an Ellipse Using Coordinate Transformation*, Alifmatika: Jurnal Pendidikan dan Pembelajaran Matematika, **4**(1) (2022).

Rohman, H. A., *Relationship Between The Ellipse Curve and The Sine Wave Using Circular Cylinder Section*, Cambridge Open Engage, 2024, https://www.cambridge.org/engage/coe/article-details/66188ce5418a5379b0a985ef, diakses pada 07 Desember 2024.

Rohman, H. A., & Jupri, A., *Investigating the Equation and the Area of Ellipse Using Circular Cylinder Section Approach*, International Conference on Mathematics and Science Education of Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung, 2019, 210–214.

Scimone, A., *Ellipse : what else ?*, The Mathematical Gazette, **99**(546) (2015), 481–490.

Soltani, A., *Exact Equation of Ellipse Perimeter by Analytical Method*, Cambridge Open Engage, 2022, https://www.cambridge.org/engage/coe/article-details/62fb27cf1d6a9985260596a2, diakses pada 7 Desember 2024.