

Penerapan Formalisme Euler-Lagrange dan Solusi Persamaan Geraknya dalam Perancangan Pompa Air dengan Kincir Sebagai Tenaga Penggerak

Jamrud Aminuddin^{*1}, Mukhtar Effendi^{1,2}, Nurhayati³, Agustina Widiyani⁴, dan Sunardi¹

¹Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jenderal Soedirman, Jl. dr. Suparno 61 Karangwangkal-Purwokerto, Jawa Tengah, 53123, Indonesia.

²Pusat Penelitian dan Pengembangan Energi Baru dan Terbarukan, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat, Universitas Jenderal Soedirman, Jl. dr. Suparno, Karangwangkal-Purwokerto, Jawa Tengah, 53123, Indonesia

³Department of Educational Physics, Faculty of Education and Teacher Training, Univ. Islam Negeri Ar-Raniry, Jl. Syekh Abdur Rauf Kopelma Darussalam, Banda Aceh, 23111, Indonesia.

⁴Department of Physics, Faculty of Science, Institut Technology Sumatera, Jl. Terusan Ryacudu, Way Hui, Jati Agung-Lampung Selatan, 35365, Indonesia.

*e-mail: jamrud.aminuddin@unsoed.ac.id

Abstrak – Sebagian besar pompa air untuk mengalirkan air dari posisi yang rendah ke posisi yang lebih tinggi menggunakan mesin sebagai tenaga penggerak. Roda kecil pada bagian pompa air digerakkan melalui hubungan antara beberapa roda ke mesin. Berdasarkan mekanisme tersebut, maka dalam studi ini dilakukan perancangan pompa air dengan kincir sebagai tenaga penggerak. Perancangan tersebut dilakukan dengan menerapkan formalisme Euler-Lagrange untuk menentukan persamaan gerak turbin dan roda lainnya untuk memutar roda kecil yang terhubung secara seporos dengan pompa. Solusi persamaan gerak tersebut ditentukan dengan metode Runge-Kutta orde empat untuk mengetahui konfigurasi dan dimensi roda-roda yang digunakan dilibatkan dalam sistem tersebut. Hasil perhitungan dengan metode Runge-Kutta dalam MATLAB menunjukkan bahwa konfigurasi yang optimal berdasarkan jari-jari roda adalah $r_1 > r_2 > r_3$. Parameter r_1 , r_2 , dan r_3 adalah jari-jari turbin (roda pertama), roda kedua, dan roda pada pompa (roda ketiga). Konfigurasi tersebut dapat dikembangkan dalam berbagai ukuran dengan perbandingan $r_1=5:r_2=0,5:r_3=0,1$.

Kata kunci: pompa air, kincir, Euler-Lagrange, Runge-Kutta, MATLAB

Abstract – Almost of hydrolic pump for lifting water from the lower to higher positions utilize a machine as a driving force. The small wheel on the hydrolic pump is rotated through wheels connection to machine. From that mechanism, we design a hydrolic pump with a turbine as a driving force in this study. The designing is carried out by applying Euler-Lagrange formalism to determine equation of motion for turbine and other wheels for rotating a small wheel which is connected axially with pump. A numerical solution for the equation of motion is solved by means of the fourth order of Runge-Kutta method to retrieve configuration and dimension of some wheels which is employed on that system. The results of computational process in MATLAB show that the optimal configuration based on wheels' radius is $r_1 > r_2 > r_3$. Here, r_1 , r_2 , and r_3 are radius of turbine (first wheel), second wheel, and wheel's pump (third wheel). The configuration is possible to develop in several size with ratio $r_1=5:r_2=0.5:r_3=0.1$.

Key words: hydrolic pump, turbine, Euler-Lagrange, Runge-Kutta, MATLAB

PENDAHULUAN

Pompa merupakan peralatan yang sangat penting untuk mengalirkan air dari posisi yang lebih rendah ke posisi yang lebih tinggi. Pemanfaatan pompa pada sumur yang sangat dalam mutlak menggunakan tenaga mesin karena dibutuhkan putaran dengan kecepatan sangat besar. Untuk itu, dalam studi ini hanya terbatas pada perancangan pompa untuk mengangkat air dari posisi yang tidak terlalu dalam. Salah satu fenomena yang sering

ditemukan adalah proses pengangkatan aliran sungai ke posisi yang lebih tinggi untuk pengairan area sawah [1,2].

Pemanfaatan pompa air bertenaga mesin pada prinsipnya dapat dimodifikasi dengan pemanfaatan kincir air sebagai tenaga penggerak. Pompa ini merupakan hasil modifikasi pompa air yang digerakkan dengan tenaga mesin. Selain itu, pompa air ini juga dikembangkan berdasarkan prinsip kerja pompa yang memanfaatkan tekanan air dalam pipa untuk mengangkat air dari posisi lebih rendah

ke posisi yang lebih tinggi. Pompa yang memanfaatkan prinsip tekanan fluida untuk mengalirkan air dikenal dengan pompa hydram. Pompa hydram mampu bekerja dengan baik pada aliran air bertekanan tinggi sedangkan pada aliran bertekanan rendah tidak bekerja secara maksimal [3,4,5].

Dalam studi ini dikembangkan sebuah design pompa dengan kincir air sebagai tenaga penggerak berdasarkan kerja turbin air untuk memutar generator listrik pada pembangkit listrik tenaga air (PLTA) mikrohidro dan picohidro [6]. Kecepatan putaran kincir dan beberapa roda untuk memutar pompa air dianalisis berdasarkan kecepatan radial semua roda yang digunakan dalam sistem [2,6].

Konfigurasi roda dalam sistem ini, selanjutnya dianalisis dengan menentukan persamaan gerak radial melalui formalisme Euler-Lagrange dalam bentuk persamaan diferensial [7,8]. Sebuah persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan metode numerik untuk mengetahui kondisi fisis yang paling mendekati keadaan sebenarnya [9,10].

Dalam studi ini, metode Runge-Kutta digunakan untuk menentukan solusi numerik persamaan gerak radial kincir dan roda untuk memutar pompa air. Secara teknik, metode ini diterapkan dengan metode yang sama dalam referensi [9,10,11]. Hasil perhitungan dengan metode Runge-Kutta dalam MATLAB digunakan untuk menentukan konfigurasi dan dimensi pompa air yang digerakkan dengan kincir kecepatan rendah.

METODE

Perancangan pompa air yang digerakkan dengan kincir dimulai dari penentuan konfigurasi 3 roda utama. Roda pertama (kincir) terhubung satu sumbu dengan roda kedua, sedangkan roda kedua dihubungkan dengan roda ketiga (roda pemutar pompa) menggunakan sabuk. Konfigurasi ini kemudian dinyatakan dalam bentuk Lagrangian (L) dengan energi totalnya hanya terdiri atas energi kinetik (T). Dengan pertimbangan bahwa jari-jari roda tetap selama perputarannya, maka energi potensial dianggap nol ($V=0$). Selanjutnya, bentuk non konservatif persamaan Euler-Lagrange dinyatakan dalam bentuk:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = Q_n \tag{1}$$

Pada persamaan (1), ada tiga parameter yang dilibatkan, yaitu koordinat umum (q_n), waktu (t), dan gaya eksternal (Q_n). Dalam kasus ini gaya eksternal dianggap sebagai gaya penggerak roda [7]. Prinsip ini merupakan hasil modifikasi dari sistem penggerak roda pada sepeda [8].

Roda pertama sebagai representasi kincir digerakkan dorongan air dalam arah tegak lurus, sehingga dapat dinyatakan dalam bentuk torka,

$$\tau = Fr_{\perp} \tag{2}$$

Total gaya external dalam sistem ini merupakan selisih antara gaya dorong dan gaya kendala yang bergantung pada koefisien gesek kinetis dan nilai kecepatan angularnya dalam bentuk:

$$Q_n = Fr_i - \dot{\theta}_i b \tag{3}$$

Selanjutnya energi kinetik setiap roda dinyatakan secara umum dalam bentuk:

$$T_i = \frac{1}{2} I_i \dot{\theta}_i^2 \tag{4}$$

Di mana indeks- i merupakan urutan roda dari 1 sampai 3.

Fungsi Lagrange dapat diturunkan dengan menggunakan energi kinetik pada persamaan (4) dan energi potensial yang dianggap nol ($V=0$). Kondisi ini menghasilkan Lagrangian dalam bentuk:

$$L = \frac{1}{2} (I_1 \dot{\theta}_1^2 + I_2 \dot{\theta}_2^2 + I_3 \dot{\theta}_3^2) \tag{6}$$

Rotasi pada setiap roda dinyatakan sebagai:

$$\dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_2 \left(\frac{r_2}{r_3} \right) = \dot{\theta}_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \tag{7}$$

Persamaan gerak sistem ini dirumuskan dengan menggunakan fungsi Lagrange pada persamaan (6) dan (7) pada persamaan (1) dengan mengasumsikan bahwa gaya external yang digunakan adalah Q_n pada persamaan (3). Prosedur ini menghasilkan

$$\frac{d^2 \dot{\theta}_i}{dt^2} = \frac{Fr_1 - \dot{\theta}_1 b}{\left[I_1 + I_2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 + I_3 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]} \tag{8}$$

dengan I adalah momen inersia roda-roda yang dilibatkan dalam perumusan, yaitu:

$$I = \left[I_1 + I_2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 + I_3 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] \tag{9}$$

Solusi numerik persamaan (8) ditentukan dengan metode Runge-Kutta orda 4 dengan terlebih dahulu menamakan persamaan solusi umum dalam bentuk:

$$\dot{\theta}_1^{(i+1)} = \dot{\theta}_1^{(i)} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (10)$$

Pada persamaan (10), konstanta k yang terdiri atas empat orde ditentukan dengan formula berikut:

$$k_1 = hf \left(t^{(i)}, \dot{\theta}_i^{(i)} \right), \quad (11)$$

$$k_2 = hf \left(t^{(i)} + \frac{h}{2}, \dot{\theta}_i^{(i)} + \frac{k_1}{2} \right), \quad (12)$$

$$k_3 = hf \left(t^{(i)} + \frac{h}{2}, \dot{\theta}_i^{(i)} + \frac{k_2}{2} \right), \quad (13)$$

$$k_4 = hf \left(t^{(i+1)}, \dot{\theta}_i^{(i)} + k_3 \right). \quad (14)$$

Parameter h merupakan hasil pembagian panjang terhadap jumlah interval waktu (N) dalam bentuk:

$$h = \frac{t^{(n)} - t^{(i)}}{N} \quad (15)$$

Panjang interval waktu merupakan selisih antara waktu awal ($t^{(i)}$) dan waktu akhir ($t^{(n)}$). Algoritma metode Runge-Kutta tersebut diimplementasikan dalam MATLAB dengan menginput nilai tertentu untuk mendapatkan konfigurasi dan dimesi yang ideal [10].

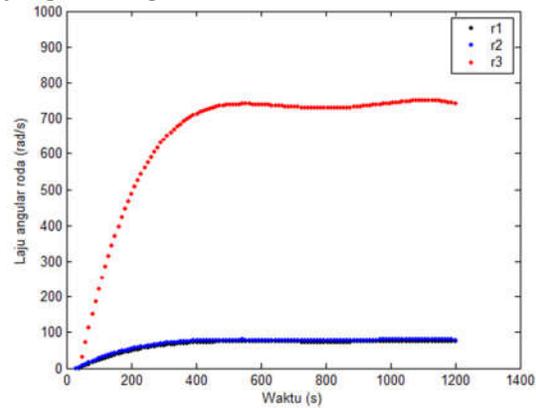
HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil perhitungan laju angular roda pertama, kedua, dan ketiga yang telah dilakukan dalam MATLAB dinyatakan dalam bentuk grafik antara ketiganya. Program dijalankan dengan menginput gaya dorong air terhadap kincir (roda pertama), gaya kendala dalam bentuk koefisien gesek kinetis, jari-jari semua roda, momen inersia semua roda, dan koefisien gesek kinetik sistem. Nilai-nilai parameter yang telah dicobakan didasarkan pada tingginya laju angular roda yang memutar pompa meskipun kincir mendapatkan gaya dorong yang rendah.

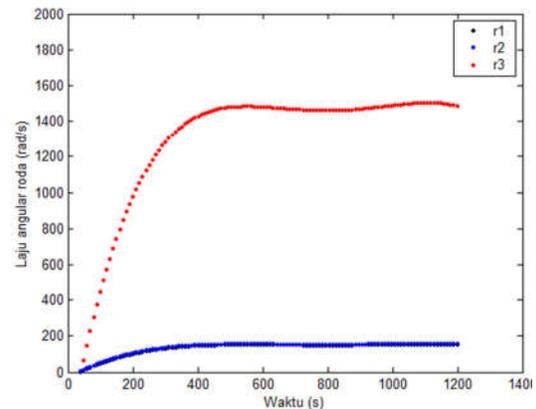
Dari perhitungan dalam MATLAB yang telah dilakukan dengan mencoba beberapa nilai secara acak berdasarkan konfigurasi pada referensi [2,6], diketahui bahwa sistem akan bekerja secara optimal dimensi masing-masing roda pertama, kedua, dan ketiga adalah $r_1=0,5$, $r_2=0,05$, dan $r_3=0,01$ m. Selanjutnya, inersia masing-masing roda pertama, kedua, dan ketiga adalah $I_1=0,05$, $I_2=0,04$, dan $I_3=0,03$ kgm^2 dengan nilai koefisien gesek kinetik sebagai representasi gaya kendala adalah 0,05 N. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa nilai-nilai tersebut mampu memutar roda yang terhubung dengan pompa dengan laju anglar yang lebih

tinggi dari yang lain meskipun didorong dengan gaya 10 N.

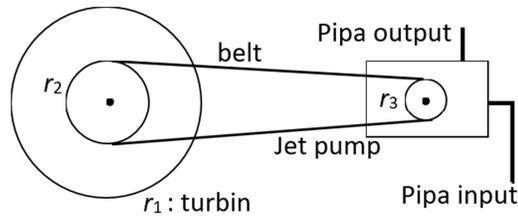
Perubahan laju angular semua roda yang dilibatkan dalam sistem penggerak diperlihatkan pada Gambar 1 dan 2. Pada saat gaya dorong sebesar 10 N, roda pertama dan kedua mempunyai laju angular sekitar 100 rad/s sedangkan roda ketiga yang menggerakkan pompa rata-rata antara 700-800 rad/s. Jika gaya dorong yang diberikan sebesar 10 N dengan dimensi semua roda sama dengan parameter pada Gambar 1, maka laju angular akan meningkat menjadi dua kali lipat sebagaimana yang terlihat pada Gambar 2.



Gambar 1. Perubahan laju angular setiap waktu dengan dimensi masing-masing roda pertama, kedua, dan ketiga adalah $r_1=0,5$, $r_2=0,05$, dan $r_3=0,01$ m yang didorong dengan gaya 10 N.



Gambar 2. Perubahan laju angular setiap waktu dengan dimensi masing-masing roda pertama, kedua, dan ketiga adalah $r_1=0,5$, $r_2=0,05$, dan $r_3=0,01$ m yang didorong dengan gaya 20 N.



Gambar 3. Konfigurasi dan dimensi roda penggerak pompa air dengan perbandingan $r_1=5:r_2=0,5:r_3=0,1$.

Berdasarkan analisis numerik dengan dimensi roda untuk menghasilkan perubahan laju angular pada Gambar 1 dan 2, maka diperoleh konfigurasi roda dalam bentuk Gambar 3. Pompa dengan konfigurasi seperti pada Gambar 3 digerakkan gaya dorong air untuk memutar kincir air. Putaran kincir air (roda pertama) yang terhubung secara eporos dengan roda kedua selanjutnya akan memutar roda ketiga yang terhubung secara serantai menggunakan belt. Putaran roda ketiga yang terhubung secara seporos dengan komponen bagian dalam pompa yang berputar untuk mengisap dan membuang air. Konfigurasi tersebut dapat dikembangkan dalam berbagai ukuran dengan perbandingan $r_1=5:r_2=0,5:r_3=0,1$. Besaran lainnya yang memerlukan analisis lebih lanjut adalah momen inersia yang terkait dengan massa dan kepadatan semua roda.

KESIMPULAN

Penerapan formalisme Euler-Lagrange dan metode Runge-Kutta dalam perancangan pompa air menghasilkan konfigurasi dan dimensi sistem penggerakannya. Hasil perhitungan dalam MATLAB menunjukkan bahwa konfigurasi yang optimal berdasarkan jari-jari roda adalah $r_1 > r_2 > r_3$. Parameter r_1 , r_2 , dan r_3 adalah jari-jari turbin (roda pertama), roda kedua, dan roda pada pompa (roda ketiga). Konfigurasi tersebut dapat dikembangkan dalam berbagai ukuran dengan perbandingan $r_1=5:r_2=0,5:r_3=0,1$.

UCAPAN TERIMA KASIH

Kami mengucapkan terima kasih atas dana kegiatan dari LPPM UNSOED pada skim audiovisualisasi IPTEKS, Tahun Anggaran 2013 dengan Nomor Kontrak: Kept.2267/UN23.10/PM/2013 Tanggal 6 Mei 2013.

PUSTAKA

- [1] Y.A. Cahyanta dan A.W. Mandagi, The Effect of Waste Valve Stroke Length on The Hydraulic Ram Pump Performance, *International Journal of Engineering and Science* 2(4) (2011) 56-60.
- [2] J. Aminuddin Nurhayati, and Agustina W., Modifikasi Pompa Air dengan Kincir Kecepatan Rendah sebagai Tenaga Penggerak, *Elkawnie, Journal of Islamic Science and Technology* 1(2) (2019).
- [3] Suyatno, Rancang Bangun Pompa Hidraulik Ram (HYDRAM), *Jurnal DINAMIS* 2(12) (2008) 5-10.
- [4] A. Suryawan, Adhi A., dan Suarda I.M., Kajian Eksperimen Pengaruh Akselerasi Terhadap Performansi Pompa Hydram, *Jurnal Ilmiah Teknik Mesin CAKRAM* 3(2) (2009) 10-15.
- [5] I.M. Suarda, Perancangan dan Pengujian Model Sistem Hydram Penggerak Pompa Torak dengan Dua Sumber Aliran: Air Kotor dan Air Bersih. Makalah Utama. Disampaikan pada Seminar Nasional Tahunan Teknik Mesin (SNTTM) Ke-9, Palembang, 13-15 Oktober 2010.
- [6] H. Soekarno, Anggono T. dan A. Heriansyah, A Basic Component in Designing of Micro Hydropower, *Journal of P3TEK* 1(1) (2002) 8-12.
- [7] J.R. Taylor, *Classical Mechanics*. 4th Edition, University Science Books, USA, 2005.
- [8] J.P. Meijaard, J.M. Papadopoulos, A. Ruina, and A.L. Schwab, Linearized Dynamics Equation for the Balance and Steer of a Bicycle, *Proc. R. Soc. A* 463 (2007) 1-63.
- [9] J. Naber, A Runge-Kutta discontinuous-Galerkin Level-Set Method for Unsteady Compressible Two-Fluid Flow, REPORT MAS-E0601, Centrumvoor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 2006.
- [10] J. Aminuddin, *Dasar-dasar Fisika Komputasi Menggunakan Matlab*, Gaya Media, Yogyakarta, 2008.
- [11] K.V. Alexander, and E.P. Giddens, Optimum Penstocks for Low Head Micro Hydro Schemes, *Renewable Energi* 33(3) (2008) 507-519.