

ANALISIS DINAMIK MODEL LESLIE-GOWER YANG DIPENGARUHI WAKTU TUNDA DAN PEMANENAN PROPORSIONAL

Azhari Kemalasari

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jenderal Soedirman
azhari.kemalasari@mhs.unsoed.ac.id

Rina Reorita*

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jenderal Soedirman
rina.reorita@unsoed.ac.id

Renny

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jenderal Soedirman
renny@unsoed.ac.id

ABSTRACT. *The main purpose of this research is to study the Leslie-Gower model with time delay and proportional harvesting. The model is solved qualitatively by analyzing the stability around equilibrium points. The Leslie-Gower with delay time and proportional harvesting have four equilibrium points. There is an unstable equilibrium point and a stable equilibrium point. Meanwhile, the stability of the other two equilibrium points depends on the value of the parameters taken. The parameter of delay time causes the solution to oscillate. The greater the delay time value used the greater amplitude of oscillations in the system. It means the model will take longer to stabilize.*

Keywords: *Model Leslie-Gower, equilibrium points, time delay.*

ABSTRAK. Penelitian ini dilakukan untuk menganalisis perilaku model Leslie-Gower dengan waktu tunda dan pemanenan proporsional. Metode yang digunakan pada penyelesaian model adalah metode kualitatif, yaitu dengan menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model. Model Leslie-Gower dengan waktu tunda dan pemanenan proporsional memiliki empat titik kesetimbangan. Terdapat satu titik kesetimbangan tidak stabil dan satu titik kesetimbangan yang bersifat stabil. Sementara itu, untuk dua titik kesetimbangan lainnya, bergantung pada nilai parameter yang diambil. Waktu tunda mengakibatkan adanya osilasi pada model. Semakin besar nilai waktu tunda yang digunakan, maka semakin besar pula simpangan pada osilasi yang terjadi pada penyelesaian sistem. Hal tersebut mengakibatkan model akan semakin lama untuk menuju kestabilan.

Kata Kunci: Model Leslie-Gower, titik kesetimbangan, waktu tunda.

1. PENDAHULUAN

Predasi adalah salah satu jenis interaksi yang terjadi antara dua spesies atau lebih dalam sebuah ekosistem. Predasi merupakan interaksi antara pemangsa

*Penulis Korespondensi

(predator) dan mangsa (*prey*) dengan tujuan untuk memenuhi kelangsungan hidup dan menjaga keseimbangan ekosistem. Tanpa adanya *prey*, maka predator akan mengalami kepunahan. Begitupun sebaliknya, tanpa adanya predator, maka populasi *prey* akan bertambah tak terkendali.

Dalam sudut pandang matematika, interaksi antara predator dan *prey* dapat direpresentasikan ke dalam model matematika. Model predator-*prey* pertama kali diperkenalkan oleh Alfred James Lotka tahun 1925 dan Vito Volterra tahun 1926 [1]. Pada model Lotka-Volterra terdapat asumsi bahwa predator dan *prey* mengalami pertumbuhan secara eksponensial. Akan tetapi pada kenyataannya, populasi predator dan *prey* tidak dapat tumbuh secara terus menerus dikarenakan beberapa faktor penghambat lainnya. Berdasarkan permasalahan tersebut, Leslie-Gower melakukan modifikasi terhadap model Lotka-Volterra [5].

Model Leslie-Gower dibangun berdasar pada asumsi bahwa predator meningkat secara logistik [2], dan menekankan fakta bahwa terdapat batas atas untuk laju peningkatan *prey* dan predator, yang tidak diakomodasi pada model Lotka-Volterra [10]. Nindjin, dkk, pada tahun 2006 [8] telah menganalisis kestabilan model Leslie-Gower dan respon fungsional Holling [4] tipe II dengan waktu tunda. Respon fungsional adalah respon predator terhadap perubahan kepadatan *prey* [3]. Waktu tunda mengasumsikan bahwa laju pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada waktu sekarang tetapi juga bergantung pada waktu di masa lalu [6].

Pada kenyataannya, jumlah populasi juga bergantung pada faktor eksternal pada ekosistem, misalnya pemanenan. Dilihat dari segi kebutuhan manusia, eksploitasi sumber daya hayati dan pemanenan populasi umumnya dipraktikkan dalam perikanan, kehutanan dan pengelolaan satwa liar [9]. Pemanenan dapat dilakukan pada populasi predator, pada populasi *prey*, atau pada kedua populasi tersebut, bergantung pada nilai ekonomis yang dapat dirasakan oleh manusia. Pengaruh tingkat pemanenan konstan pada model predator-*prey* dengan waktu tunda telah dibahas oleh Martin dan Ruan tahun 2001 [7]. Pada penelitian ini, penulis tertarik untuk memodifikasi model predator-*prey* Leslie-Gower dengan respon fungsional Holling Tipe II pada Nindjin, dkk tahun 2006 [8].

Modifikasi dilakukan dengan menambahkan faktor pemanenan proporsional pada model [8] tersebut. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk melihat perilaku dinamik dari model yang dipengaruhi oleh waktu tunda.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Model Matematika

Model yang dibahas pada penelitian ini adalah model Leslie-Gower dan respon Holling tipe II dengan waktu tunda dan pemanenan proporsional. Asumsi yang digunakan dalam pembentukan model Leslie-Gower dan respon Holling tipe II dengan waktu tunda dan pemanenan proporsional adalah sebagai berikut:

1. Populasi *predator* dan populasi *prey* bersifat tertutup.
2. Model Leslie-Gower yang dikaji terdiri dari satu populasi *prey* dan satu populasi *predator*, dimana pada populasi *prey* dilakukan pemanenan secara proporsional.
3. Terdapat faktor waktu tunda yang digunakan pada hilangnya populasi *predator* karena kelangkaan populasi *prey*. Hal ini dikarenakan hilangnya populasi *predator* karena kelangkaan makanannya, yaitu populasi *prey*, tidak hanya bergantung pada kelangkaan *prey* waktu sekarang, tetapi juga bergantung pada kelangkaan *prey* pada waktu sebelumnya.

Berdasarkan asumsi yang digunakan, dapat diperoleh model Leslie-Gower dan respon Holling tipe II dengan waktu tunda dan pemanenan proporsional sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \left(a_1 - h - bx(t) - \frac{c_1 y(t)}{x(t) + k_1} \right) x(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \left(a_2 - \frac{c_2 y(t - \tau)}{x(t - \tau) + k_2} \right) y(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Variabel dan parameter yang digunakan pada persamaan (1) dijelaskan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Daftar variabel dan parameter yang digunakan dalam model

Simbol	Definisi	Syarat
$x(t)$	Jumlah populasi <i>prey</i> terhadap waktu t	$x(t) \geq 0$
$y(t)$	Jumlah populasi predator terhadap waktu t	$y(t) \geq 0$
a_1	Laju pertumbuhan intrinsik populasi <i>prey</i>	$a_1 > 0$
a_2	Laju pertumbuhan intrinsik populasi <i>predator</i>	$a_2 > 0$
τ	Waktu tunda	$\tau \geq 0$
h	Prosentase pemanenan pada populasi <i>prey</i>	$h > 0$
c_1	Laju pengurangan populasi <i>prey</i> karena populasi <i>predator</i>	$c_1 > 0$
c_2	Laju kompetisi antar populasi predator	$c_2 > 0$
k_1	<i>Half saturation constant</i> populasi <i>prey</i>	$k_1 > 0$
k_2	Perlindungan populasi predator oleh lingkungan	$k_2 > 0$
b	Laju kompetisi antar populasi <i>prey</i>	$b > 0$

2.2 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Terdapat empat buah titik kesetimbangan sistem persamaan (1) yaitu $TE_1 = (0,0)$, $TE_2 = \left(\frac{a_1-h}{b}, 0\right)$, $TE_3 = \left(0, \frac{a_2 k_2}{c_2}\right)$, dan $TE_4 = \left(\frac{a_1-h}{b}, \frac{a_2(a_1-h+bk_2)}{bc_2}\right)$, dengan syarat kepositifan titik kesetimbangan yaitu $a_1 - h > 0$. Untuk menganalisis kestabilan setiap titik kesetimbangan tersebut, terlebih dahulu dilakukan linierisasi sistem persamaan (1) dengan memisalkan

$$x(t) = x^* + X(t) \text{ dan } y(t) = y^* + Y(t)$$

$$x(t - \tau) = x^* + X(t - \tau) \text{ dan } y(t - \tau) = y^* + Y(t - \tau),$$

dengan dalam hal ini x^* adalah titik kesetimbangan sistem. Hasil linierisasi sistem adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= \left(a_1 - h - 2bx^* - \frac{c_1 y^* k_1}{(x^* + k_1)^2} \right) X(t) + \left(-\frac{c_1 x^*}{x^* + k_1} \right) Y(t), \\ \frac{dY(t)}{dt} &= \left(\frac{c_2 (y^*)^2}{(x^* + k_2)^2} \right) X(t - \tau) + \left(-\frac{c_2 y^*}{x^* + k_2} \right) Y(t - \tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Selanjutnya untuk menentukan matriks Jacobi, dilakukan penurunan parsial terhadap ruas kanan persamaan (2). Dengan demikian diperoleh matriks Jacobi sistem persamaan (2) di sekitar titik kesetimbangan sistem :

$$J = \begin{pmatrix} a_1 - h - 2bx^* - \frac{c_1 y^* k_1}{(x^* + k_1)^2} & -\frac{c_1 x^*}{x^*(t) + k_1} \\ e^{-\lambda\tau} \left(\frac{c_2 (y^*)^2}{(x^* + k_2)^2} \right) & e^{-\lambda\tau} \left(-\frac{c_2 y^*}{x^* + k_2} \right) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

2.2.1 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan TE_1

Titik kesetimbangan $TE_1(0,0)$ dengan $x^* = 0$ dan $y^* = 0$ disubstitusikan ke dalam elemen-elemen matriks Jacobi (3), sehingga diperoleh matriks Jacobi dari titik kesetimbangan TE_1 sebagai berikut :

$$J_{TE_1} = \begin{bmatrix} a_1 - h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, berdasarkan matriks Jacobi di sekitar titik kesetimbangan TE_1 diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut :

$$\lambda^2 - a_1\lambda + h\lambda = 0. \quad (4)$$

Berdasarkan persamaan karakteristik (4) diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = a_1 - h$. Karena $a_1 - h > 0$, maka titik kesetimbangan TE_1 bersifat tidak stabil.

2.2.2 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan TE_2

Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan $TE_2 \left(\frac{a_1 - h}{b}, 0 \right)$ adalah sebagai berikut :

$$J_{TE_2} = \begin{bmatrix} -a_1 + h & -\frac{c_1(a_1 - h)}{a_1 - h + bk_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, berdasarkan matriks Jacobi di sekitar titik kesetimbangan TE_2 diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut :

$$\lambda^2 + a_1\lambda - h\lambda = 0. \quad (5)$$

Berdasarkan persamaan karakteristik (5) diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = -a_1 + h$. Karena $-a_1 + h < 0$, maka titik kesetimbangan TE_2 bersifat stabil.

2.2.3 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan TE_3

Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan $TE_3 \left(0, \frac{a_2 k_2}{c_2} \right)$ adalah sebagai berikut :

$$J_{TE_3} = \begin{bmatrix} \frac{(a_1 - h)c_2k_1^2 - a_2k_2c_1}{c_2k_1^2} & 0 \\ e^{-\lambda\tau} \left(\frac{a_2^2}{c_2} \right) & e^{-\lambda\tau}(-a_2) \end{bmatrix},$$

yang menghasilkan persamaan karakteristik seperti berikut :

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad (6)$$

dengan

$$p = - \left(\frac{(a_1 - h)c_2k_1^2 - a_2k_2c_1}{c_2k_1^2} - a_2e^{-\lambda\tau} \right)$$

dan

$$q = \left(\frac{(a_1 - h)c_2k_1^2 - a_2k_2c_1}{c_2k_1^2} \right) (-a_2e^{-\lambda\tau}).$$

Perhatikan bahwa suku $(-a_2e^{-\lambda\tau})$ bernilai negatif. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, agar $TE_3 \left(0, \frac{a_2k_2}{c_2} \right)$ stabil asimtotis, haruslah $(a_1 - h)c_2k_1^2 < a_2k_2c_1$.

2.2.4 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan TE_4

Titik kesetimbangan $TE_4 \left(\frac{a_1 - h}{b}, \frac{a_2(a_1 - h + bk_2)}{bc_2} \right)$ disubstitusikan ke dalam elemen-elemen matriks Jacobi (3), sehingga diperoleh matriks Jacobi di sekitar titik kesetimbangan TE_4 sebagai berikut :

$$J_{TE_4} = \begin{bmatrix} -(a_1 - h) - \frac{a_2bc_1[a_1 - h + bk_2]}{c_2[a_1 - h + bk_2]^2} & -\frac{c_1(a_1 - h)}{a_1 - h + bk_1} \\ e^{-\lambda\tau} \left(\frac{a_2^2}{c_2} \right) & -a_2e^{-\lambda\tau} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, berdasarkan matriks Jacobi di sekitar titik kesetimbangan TE_4 diperoleh persamaan karakteristik $\det(J_{TE_4} - \lambda I) = 0$ sebagai berikut :

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0 \quad (7)$$

dengan

$$A = a_2e^{-\lambda\tau} + (a_1 - h) + \frac{a_2bc_1}{c_2[a_1 - h + bk_2]},$$

$$B = (a_1 - h)a_2e^{-\lambda\tau} + \frac{a_2a_2e^{-\lambda\tau}bc_1}{c_2[a_1 - h + bk_2]} + \frac{a_2^2e^{-\lambda\tau}c_1(a_1 - h)}{c_2(a_1 - h + bk_1)}.$$

Dengan menggunakan kriteria Rurth-Hurwitz, akar-akar dari persamaan karakteristik (7) dikatakan memiliki bagian riil negatif apabila syarat

$$a_2e^{-\lambda\tau} + (a_1 - h) + \frac{a_2bc_1}{c_2[a_1 - h + bk_2]} > 0$$

terpenuhi, karena $a_1 > h$ dan nilai $e^{-\lambda\tau}$ selalu positif. Sementara itu, syarat

$$(a_1 - h)a_2e^{-\lambda\tau} + \frac{a_2a_2e^{-\lambda\tau}bc_1}{c_2[a_1 - h + bk_2]} + \frac{a_2^2e^{-\lambda\tau}c_1(a_1 - h)}{c_2(a_1 - h + bk_1)} > 0$$

terpenuhi karena $a_1 > h$ dan nilai $a_2e^{-\lambda\tau}$ selalu positif. Karena syarat $A > 0$ dan $B > 0$ terpenuhi, maka titik kesetimbangan TE_4 bersifat stabil asimtotis.

2.3 Simulasi

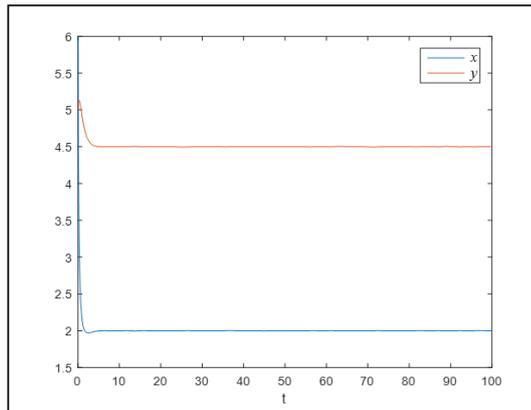
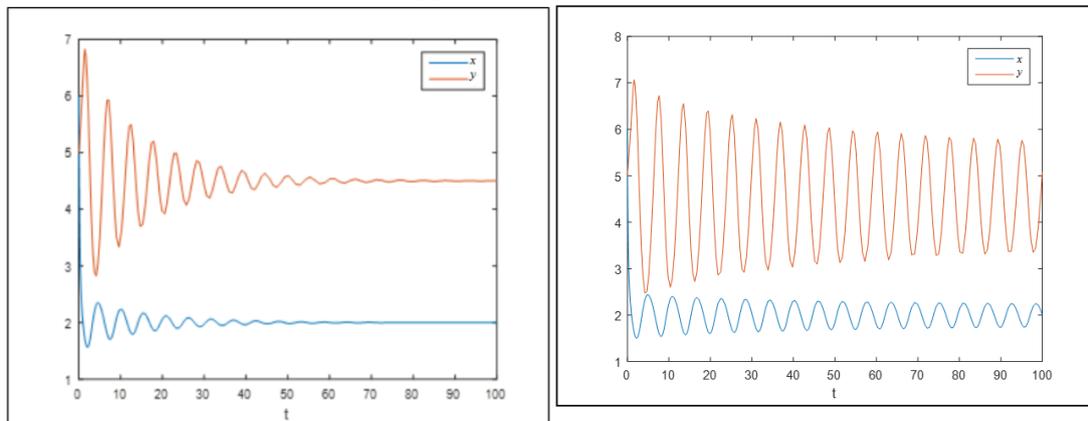
Pada simulasi ini, nilai-nilai parameter yang digunakan adalah $a_1 = 4, a_2 = 1, b = 1, c_1 = 2, c_2 = 2, k_1 = 7, k_2 = 7, h = 1$. Berdasarkan nilai-nilai parameter tersebut, diperoleh hasil seperti pada Tabel 2.

Tabel 2. Titik kesetimbangan dan nilai eigen

Titik Kesetimbangan	Nilai Eigen	Keterangan
$TE_1(0; 0)$	$\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 3$	Tidak Stabil
$TE_2(3; 0)$	$\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = -3$	Stabil
$TE_3(0; 3,5)$	$\lambda_1 = 2,8$ dan $\lambda_2 = -e^{-\lambda\tau}$	Tidak Stabil
$TE_4(2; 4,5)$	$\lambda^2 + (3 + e^{-\lambda\tau})\lambda + 3,3e^{-\lambda\tau} = 0$	Stabil Asimtotis

Berdasarkan Tabel 2, dapat dilihat bahwa $TE_2(3; 0)$ bersifat stabil dan $TE_4(2; 4,5)$ bersifat stabil asimtotis. Titik kesetimbangan $TE_2(3; 0)$ merupakan titik kesetimbangan kepunahan predator. Sementara itu, titik kesetimbangan $TE_4(2; 4,5)$ merupakan titik kesetimbangan dimana prey dan predator hidup berdampingan.

Lebih lanjut lagi, akan dilihat simulasi sistem persamaan (1) di sekitar $TE_4(2; 4,5)$ dengan nilai awal $x(0) = 6$ dan $y(0) = 5$. Simulasi dibagi menjadi tiga kasus dengan nilai waktu tunda τ berbeda-beda, yaitu $\tau = 0, \tau = 1,25$, dan $\tau = 1,4$, untuk melihat pengaruh dari waktu tunda terhadap kesetimbangan populasi predator dan prey. Berikut merupakan bidang solusi sistem persamaan (1) di sekitar titik kesetimbangan $TE_4 = (2; 4,5)$ dengan nilai parameter waktu tunda τ yang berbeda-beda.

(a) Kasus 1 untuk $\tau = 0$.(b) Kasus 2 untuk $\tau = 1,25$.(c) Kasus 3 untuk $\tau = 1,4$.**Gambar 1** Bidang solusi sistem persamaan (1) dengan nilai waktu tunda bervariasi.

Berdasarkan Gambar 1(a) dapat dilihat bahwa bidang solusi dari sistem persamaan (1) untuk jangka waktu yang lama dengan nilai parameter waktu tunda $\tau = 0$ mengalami kenaikan pada populasi *predator* sedangkan untuk populasi *prey* mengalami penurunan. Pada bidang solusi tersebut, diketahui bahwa populasi *prey* mengalami penurunan yang akhirnya mencapai kestabilan populasi *prey* menuju $x = 2$. Sementara itu, pada populasi *predator* mengalami kenaikan lalu penurunan yang mengakibatkan kestabilan populasi *predator* menuju $y = 4,5$.

Dari Gambar 1(b) diketahui bahwa pada populasi *prey* mengalami osilasi di awal pertumbuhan, namun seiring berjalannya waktu osilasi yang terjadi di populasi *prey* semakin kecil yang mengakibatkan kestabilan populasi *prey* menuju $x = 2$. Sementara itu, pada populasi *predator* mengalami hal yang sama seperti jumlah populasi *prey* yaitu osilasi. Osilasi pada jumlah populasi *predator*

mengalami penurunan seiring berjalannya waktu, dan populasi *predator* mengalami kestabilan menuju $y = 4,5$.

Gambar 1(c) menunjukkan bahwa osilasi pada jumlah populasi *predator* dan *prey* terjadi dalam jangka waktu yang lama. Akan tetapi berdasarkan perhitungan nilai eigen pada Tabel 2 dengan nilai parameter $\tau = 1,4$, titik kesetimbangan $TE_4 = (2; 4,5)$ bersifat stabil asimtotis. Karena nilai parameter waktu tunda yang diambil pada kasus 3 cukup besar yaitu $\tau = 1,4$, maka sistem persamaan (1) membutuhkan waktu yang lebih lama untuk mencapai kestabilan, dibandingkan dengan nilai τ yang lebih kecil.

Berdasarkan tiga kasus dari sistem persamaan (1) dengan nilai waktu tunda yang berbeda-beda, dapat disimpulkan bahwa semakin besar nilai waktu tunda τ yang digunakan, maka penurunan nilai simpangan osilasi berlangsung dalam waktu yang lebih lama. Hal ini mengakibatkan sistem persamaan (1) membutuhkan waktu lebih lama untuk menuju kestabilan.

3 KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan yang telah diuraikan pada bagian sebelumnya, diperoleh kesimpulan bahwa model Leslie-Gower dan Respon Holling Tipe II dengan waktu tunda dan pemanenan proporsional memiliki satu titik kesetimbangan tidak stabil, satu titik kesetimbangan stabil, dan dua titik kesetimbangan bersifat stabil asimtotis bergantung pada nilai-nilai parameter tertentu. Hasil simulasi model memberikan kesimpulan bahwa semakin besar nilai parameter waktu tunda yang digunakan, maka penyelesaian sistem akan berosilasi dengan simpangan yang semakin besar. Selain itu, dibutuhkan waktu yang lama untuk penyelesaian sistem agar menuju kestabilan.

Pada penelitian ini diasumsikan waktu tunda konstan, sehingga untuk penelitian selanjutnya diharapkan dapat dikaji model Leslie-Gower dengan pengaruh waktu tunda yang bergantung pada waktu.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Boyce, W. E. dan DiPrima, R. C., *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem*, 9th Ed., John Wiley & Sons, New Jersey, 2009.
- [2] Chen, S., Li, W., dan Ma, Z., *Analysis on A Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Predator-Prey System Incorporating A Prey Refuge and Time Delay*, *Dynamic System and Applications*, **27**(2) (2018), 397-421.
- [3] Hunsicker, M. E., Lorenzo, C., Bailey, K. M., Buckel, J. A., White, J. W., Link, J. S., Essington, T. E., Gaichas, S., Anderson, T. W., Brodeur, R., D., Chan, K., Chen, K., Englund, G., Frank, K. T., Freitas, V., Hixon, M. A., Hurst, T., Johnson, D. W., Kitchell, J. F., Reese, D., Rose, G. A., Sjodin, H., Sydeman, W. J., Van der Veer, H. W., Vollset, K, dan Zador, S., *Functional Responses and Sclaing in Predator-Prey Interactions of Marine Fishes: Contemporary Issues and Emerging Concepts*, *Ecology Letters*, **14** (2011), 1288-1299.
- [4] Holling, C. S., *Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism*, *Canadian Etimologi*, **91** (1959), 385-398.
- [5] Korobeinikov, A., *A Lyapunov Function for Leslie-Gower Predator-Prey Models*, *Applied Mathematics Letters*, **14** (2001), 697-699.
- [6] Kuang, Y., *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press, 1993.
- [7] Martin, A. dan Ruan, S., *Predator-prey Models with Delay and Prey Harvesting*, *Journal of Mathematical Biology*, **43** (2001), 247-267.
- [8] Nindjin, A. F., Aziz-Alaoui, M. A., dan Cadivel, M., *Analysis of Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Schemes with Time Delay*, *Nonlinear Analysis: Real World Applicaton*, **7** (2006), 1104-1119.
- [9] Xiao, D., Li, W., dan Han, M., *Dynamics in Ratio-Dependent Predator-Prey Model with Predator Harvesting*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **324** (2006), 14-29.
- [10] Yue, Q., *Dynamics of Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model with Holling-Type II Schemes and A Prey Refuge*, *SpingerPlus*, **5** (2016), 461.