Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP)
Vol. 13 No. 2, Desember 2021, hal. 105-112
ISSN (Cetak) : 2085-1456; ISSN (*Online*) : 2550-0422

PENYELESAIAN PERSAMAAN POISSON MENGGUNAKAN METODE HOMOTOPI PERTUBASI

Mashuri
Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman
mashuri@unsoed.ac.id

Sulistiowati Nur Rahmi
Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman

Marwah Daud Wijayanti
Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman

Alviana Pratama Putri
Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman

ABSTRACT. *In this paper, we discuss the solution of the Poisson equation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8u=0$$

with the initial condition $u(0,y)=\sin 2y$. We *use the homotopy pertubation method to get the solution.. The homotopy pertubation method is a combination of the homotopy method and the pertubation method. The solution of the equation is assumed to be in the form of a power series. The result is by using the homotopy pertubation method for the diffution equation, the solution is the same with the exact solution.*

Keywords. *Poisson equation, Pertubation Homotopy method, power series.*

ABSTRAK. Dalam makalah ini dibahas tentang penyelesaian persamaan Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8u=0,$$

dengan syarat awalnya adalah $u(0,y)=\sin 2y$, menggunakan metode homotopi pertubasi. Metoda homotopi pertubasi merupakan gabungan antara metode homotopi dan metode pertubasi. Solusi persamaan diasumsikan dalam bentuk deret pangkat. Hasilnya diperoleh bahwa dengan menggunakan metode homotopi pertubasi untuk persamaan Poisson, solusi yang diperoleh sama dengan solusi eksaknya.

Kata kunci. Persamaan Poisson, metode homotopi pertubasi, deret pangkat .

1. PENDAHULUAN

Pemodelan Matematika menjadi salah satu cara untuk memahami berbagai fenomena di alam ini. Salah satu model matematika yang banyak bermanfaat untuk menganalisa perilaku fenomena alam adalah model matematika dalam bentuk persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan satu variabel tak bebas dan turunannya terhadap satu atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial dibagi menjadi dua bagian, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Kedua persamaan tersebut dibedakan pada jumlah variable takbebasnya. Bila varibel bebasnya hanya ada sebuah, maka persamaan diferensialnya merupakan persamaan diferensial biasa, namun bila jumlah variabel bebasnya lebih dari satu maka persamaan diferensial adalah persamaan diferensial parsial. Berbagai metoda digunakan untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial ini. Salah satu diantara metode tersebut adalah metode pertubasi. Metode perturbasi digunakan untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial melalui pendekatan di mana solusi dari persamaan diferensial diasumsikan sebagai sebuah fungsi dalam bentuk deret pangkat. Dalam metode pertubasi mensyaratkan deretnya konvergen. Metode ini digunakan baik untuk mencari penyelesaian persamaan differensial linier ataupun non linier. Dalam menyelesaikan masalah taklinear, (Nayfeh, 2004) menggunakan metode pertubasi di mana faktor taklinearnya diperlemah dengan memperkenalkan parameter kecil. Sementara itu, JiHuan He (1999) menggabungkan antara metode pertubasi dan metode homotopi yang terlebih dahulu dikenalkan oleh Liao (1992). Metode tersebut kemudian dikenal dengan metode homotopi pertubasi dengan mengenalkan parameter *embedding* pada deret pangkat tersebut. Metode ini cukup ampuh untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier maupun nonlinier. Hal ini dikarenakan pemilihan parameter tidak hanya parameter yang kecil saja, akan tetapi boleh sama dengan 1. Dalam penelitian, ini metode homotopi pertubasi akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan Poisson dengan rincian penulisan sebagai berikut. Pada bagian dua dari paper ini dibahas tentang ide dasar metode homotopi pertubasi. Bagian berikutnya dibahas tentang penyelesaian persamaan Poisson menggunakan metode homotopi pertubasi. Paper ini diakhiri dengan kesimpulan.

2. IDE DASAR METODE HOMOTOPI PERTUBASI

Sampai saat ini, penerapan metode homotopi pertubasi dalam masalah nonlinier menjadi perhatian khusus para ilmuwan dan insinyur, karena dengan metode ini seseorang dapat secara terus menerus merubah bentuk masalah yang rumit menjadi masalah sederhana yang mudah dipecahkan. Pengenalan dan interpretasi dasar dari metode ini diberikan oleh Akbarzade dkk(2011), Andrianov dkk(2006), Bayat dkk(2010), Bel´endez (2009),nBel´endez dkk(2009). Metoda homotopi pertubasi dapat memecahkan kelas besar masalah nonlinier dengan aproksimasi yang konvergen secara cepatdan akurat ke solusi. Metode ini sangat efektif dan baik digunakan untuk persamaan nonlinier lemah maupun kuat.

Untuk mengilustrasikan ide dasar dari metode ini, diberikan persamaan diferensial tak linear berikut:

$$A[u(r)] = f(r), r\epsilon\Omega \qquad (1)$$

atau

$$A[u(r)] - f(r) = 0, \quad r\epsilon\Omega \qquad (1^*)$$

dengan kondisi batasnya adalah

$$B(u(r), \frac{\partial u(r)}{\partial n}) = 0, r\epsilon\Gamma \qquad (2)$$

dengan A operator turunan tak linier, B operator batas $f(r)$ fungsi yang diketahui, Ω adalah domain fungsi f , Γ adalah batas dari domain Ω, dan $u(r)$ adalah fungsi yang akan ditentukan yang bergantung pada r. Operator A dapat dipisahkan dalam dua bagian yaitu L dan N, dengan L adalah operator linear dan N adalah operator tak linear, sehingga persamaan (1^*) dapat ditulis sebagai berikut

$$L[u(r)] + N[u(r)] - f(r) = 0, r\epsilon\Omega \qquad (3)$$

Dalam metode homotopi, dikonstruksikan suatu homotopi berikut :

$$v(r,p): \Omega \times [0,1] \to \mathrm{R}$$

yang memenuhi persamaan berikut :

$$H(v(r,p),p) = (1-p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0 \qquad (4)$$

atau

$$H(v(r,p),p) = L(v) - L(u_0) - pL(u) + pL(u_0) + p(A(v) - f(r)) = 0 \quad (4^*)$$

dengan H adalah fungsi pertubasi homotopi, $p\epsilon[0,1]$ adalah parameter *embedding*, dan u_0 adalah pendekatan awal dari penyelesaian persamaan (1) yang memenuhi kondisi awal. Jelas bahwa :

$$H(v(r,0),0) = L(v(r,0)) - L(u_0(r)) = 0 \quad (5)$$

$$H(v(r,1),1) = A(v(r,1)) - f(r) = 0 \quad (6)$$

Berdasarkan persamaan (4), maka penyelesaian persamaan $H(v(r,0),0) = 0$ dan $H(v(r,1),1) = 0$ masing-masing adalah

$$v(r,0) = u_0(r)$$

dan

$$v(r,1) = u(r).$$

Proses peningkatan nilai p dari 0 ke 1 yang mengakibatkan perubahan $v(r,p)$ dari $u_0(r)$ ke $u(r)$ disebut deformasi. Bentuk $L(v(r,0)) - L(u_0(r))$ dan $A\big(v(r,1)\big) - f(r)$ disebut sebagai homotopi dalam topologi untuk parameter p; dengan p dalam interval $0 \le p \le 1$ disebut parameter kecil yang digunakan dalam pertubasi klasik.Dengan menggunakan metode pertubasi kita asumsikan solusi persamaan (5) dan (6) dalam bentuk deret kuasa dalam p, yaitu :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \cdots. \quad (7)$$

Jika p mendekati 1, maka diperoleh penyelesaian pendekatan dari persamaan (4) sebagai berikut :

$$u = \lim_{p\to 1} v$$

$$u = \lim\nolimits_{p\to 1}(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \cdots) \quad (8)$$

$$u = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

Kombinasi dari metode pertubasi dan metode homotopi disebut metode pertubasi homotopi.

3. PENYELESAIAN PERSAMAAN POISSON

Pada bagian ini, akan diselesaikan persaaan diferensial sebagai berikut berikut :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 0 \quad (9)$$

dengan syarat awal

$$u(0, y) = \sin 2y. \quad (10)$$

Persamaan diferensial (9) dikenal sebagai persamaan Poisson. Persamaan ini banyak ditemui dalam aplikasinya di dunia nyata. Ririn, dkk (2013) menggunakan persamaan ini pada saat mengkaji aliran fluida melalui medium berpori dan proses penghantaran panas sebagai dasar dari model matematika sistem panas bumi pasa tunggal.

Penyelesaian eksak persamaan ini adalah adalah

$$u(x, y) = \cos 2x\ sin2y \quad (11)$$

Dalam bentuk deret Taylor penyelesaian eksak (11) dapat dituliskan kembali sebagai

$$u(x, y) = [1 - 2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4 + \tfrac{2}{3}x^4 - \tfrac{4}{45}x^6 + O(x^8)]\sin 2y\ \ ) \quad (12)$$

Berikut ini akan digunakan metode pertubasi homotopi untuk menyelesaikan masalah nilai awal persamaan (9) dan (10). Didefinisikan operator L sebagai berikut :

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dan operator N sebagai berikut :

$$N\,[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u,$$

sehingga berdasarkan persamaan (4), diperoleh persamaan berikut :

$$(1 - p)\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right] + p\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 8v\right] = 0 \quad (13)$$

Diasumsikan penyelesaian dari persamaan (13) dinyatakan sebagai deret pangkat dalam p,

$$v(x, y) = v_0(x, y) + pv_1(x, y) + p^2 v_2(x, y) + p^3 v_3(x, y) + \cdots. \quad (14)$$

Jika persamaan (14) disubtitusikan ke dalam persamaan (13), kemudian dipisahkan berdasarkan derajat kepangkatan p, maka diperoleh persamaan berikut:

$$p^0 : \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0$$

$$p^1: \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + 8v_0 = 0 \tag{15}$$

$$p^2: \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + 8v_1 = 0$$

$$p^3: \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + 8v_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$p^n: \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial y^2} + 8v_{n-1} = 0$$

Dengan memilih pendekatan awal $v(0,y) = u(0,y) = \sin 2y$, maka diperoleh penyelesaian persamaan (15) sebagai berikut :

$$v_0 = \sin 2y,$$

$$v_1 = -2x^2 \sin 2y,$$

$$v_2 = \frac{2}{3} x^4 \sin 2y,$$

$$v_3 = \frac{-4}{45} x^6 \sin 2y,$$

$$v_4 = \frac{2}{315} x^8 \sin 2y,$$

$$v_5 = O(x^{10}) \sin 2y.$$

Jadi penyelesaian masalah nilai awal (9) dan (10) dengan metode pertubasi homotopi diperoleh sebagai berikut :

$$u(x,y) =$$

$$\sin 2y - 2x^2 \sin 2y + \frac{2}{3} x^4 \sin 2y - \frac{4}{45} x^6 \sin 2y + \frac{2}{315} x^8 \sin 2y + O(x^{10}) \sin 2y$$

Solusi yang diperoleh ini sama dengan solusi eksak dalam deret Taylor pada persamaan (12).

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Dalam paper ini telah diselesaikan persamaan Poisson menggunakan metoda homotopi pertubasi dimana solusi yang diperoleh sama dengan solusi eksak dalam bentuk deret taylor. Konstruksi fungsi homotopi dalam persamaan ini lebih mudah karena persamaan Poisson yang diselesaikan merupakan persamaan differensial linier.

DAFTAR PUSTAKA

Nayfeh, A. H., 2004. *Perturbation Methods.* Germany: Wiley-VCH.

Liao, S., 2012. *Homotopy Analysos Method in Nonlinier Differensial Equation.* Beijing: Higher Education Press.

He, J. H., *Homotopy perturbation technique*, Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, **178**(3) 1999, 257–262.

Ririn, S., Widowati, Solusi numeric persamaan difusi dengan menggunakan Metoda beda Hingga,Jurnal Sains dan Matematika, **21**(3) (20130,68-74.

Akbarzade, M., Langari, J., Ganji, D., *A Coupled Homotopy-Variational Method and Variational Formulation Applied to Nonlinear Oscillators with and without Discontinuities*, Journal of Vibration and Acoustics, (133) (2011), 44-50.

Andrianov, I. V., Awrejcewicz, J., Chernetskyy, V., *Analysis Of Natural in-Plane Vibration of Rectangular Plates Using Homotopy Perturbation Approach*, Mathematical Problems in Engineering, (133) 2006.

Bayat, M., Shahidi, M., Barari, A., Domairry, G., *The approximate analysis of nonlinear behavior of structure under harmonic loading*, International Journal of the Physical Sciences, **5**(7) 2010, 1074 –1080.

Bel´endez, A., *Homotopy Perturbation Method for A Conservative x1/3 Force Nonlinear Oscillator*, Computers & Mathematics with Applications, **58**(11-12) (2009), 2267–2273.

Bel´endez, A., Hernandez, A., Bel´endez, T., Neipp, C., Marquez, A., Higher Accuracy Analytical Approximations to A Nonlinear Oscillator with Discontinuity by He’s Homotopy Perturbation Method, *Physics Letters A*, **372**(12) (2008), 2010–2016.

Bel´endez, A., Bel´endez, T., Neipp, C., Hernandez, A., lvarez, M., *Approximate Solutions of A Nonlinear Oscillator Typified as A Mass Attached to A Stretched Elastic Wire by The Homotopy Perturbation Method*, Chaos, Solitons &Fractals, **39**(2) 2009, 746–764.

Bel´endez, A., Pascual, C., Bel´endez, T., Hernndez, A., *Solution for An Anti-Symmetric Quadratic Nonlinear Oscillator by A Modified He's Homotopy Perturbation Method*, Nonlinear Analysis, Real World Applications, **10**(1) (2009), 416–427.