Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP)
Vol. 13 No. 2, Desember 2021, hal. 71-80
ISSN (Cetak) : 2085-1456; ISSN (*Online*) : 2550-0422

SEMIGRUP REGULER DAN SIFAT-SIFATNYA

Najmah Istikaanah

Jurusan Matematika Universitas Jendral Soedirman
najmah.mtk@unsoed.ac.id

Ari Wardayani, Renny, Ambar Sari Nurahmadhani, Agustini Tripena, Triyani

Jurusan Matematika Universitas Jendral Soedirman

ABSTRACT*. This article discusses some properties of regular semigroups. These properties are especially concerned with the relation of the regular semigroups to groups, idempoten semigroups and invers semigroups. This article also discusses the Cartesian product of two regular semigroups where it is concluded that the Cartesian product of two regular semigroups is a regular semigroup, a group must be a regular semigroup. In addition, idempotent semigroups and inverse semigroups are also regular semigroups.*

Keywords*: idempoten semigroup, inverse semigroup, regular semigroup, Cartesian product*

ABSTRAK. Artikel ini membahas tentang sifat-sifat semigrup reguler. Sifat-sifat ini khususnya berkenaan dengan keterkaitan semigrup reguler dengan grup, semigrup idempoten, dan semigrup invers. Pada artikel ini juga dibahas mengenai hasil kali Cartesius dari dua semigrup regular dimana diperoleh kesimpulan bahwa hasil kali Cartesius dua semigrup reguler merupakan semigrup reguler, suatu grup pasti merupakan semigrup regular. Selain itu, semigrup idempoten dan semigrup invers juga merupakan semigrup regular.

Kata kunci: semigrup idempoten, semigrup invers, semigrup reguler, hasil kali kartesius.

1. PENDAHULUAN

Semigrup merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner yang bersifat assosiatif (Lidl dan Pilz, 1998: 333). Semigrup yang dilengkapi dengan elemen identitas dan elemen invers disebut grup. Elemen e pada grup $(G,*)$ disebut elemen identitas jika untuk setiap $a \in G$ berlaku $e * a = a * e = a$. Adapun elemen a^{-1} pada grup G disebut elemen invers dari a jika memenuhi $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Dengan demikian, untuk setiap a pada grup G, berlaku $e * a = a * a^{-1} * a = a$. Namun hal ini tidak selalu berlaku pada semigrup, sehingga hal ini memberikan peluang pada kita untuk mendefinisikan suatu elemen reguler. Pada penelitian Widyanesti dan Wahyuni (2011), didefinisikan bahwa elemen a pada semigrup $(S,*)$ disebut sebagai elemen reguler dimana untuk suatu $a \in S$ terdapat suatu $b \in S$ sedemikian sehingga berlaku $a * b * a = a$. Selanjutnya, semigrup yang setiap elemennya merupakan elemen reguler disebut semigrup reguler.

Pada semigrup berlaku sifat bahwa hasil kali Cartesius dua semigrup merupakan semigrup. Namun tidak semua semigrup merupakan semigrup reguler. Hal ini memotivasi munculnya ide apakah hasil kali Cartesius dua semigrup reguler merupakan semigrup regular. Pada artikel ini akan disajikan hasil mengenai hasil kali Cartesius dua semigrup reguler serta keterkaitan antara semigrup reguler dengan grup dan semigrup lainnya, yaitu semigrup invers serta *band.*

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi dari semigrup reguler diberikan oleh Howie (1976:44) sebagai berikut.

Definisi 1 (Semigrup Reguler) *Diberikan $(S,*)$ adalah semigrup. Elemen a di S disebut elemen reguler jika terdapat $b \in S$ sedemikian sehingga $a * b * a = a$. Semigrup S disebut semigrup regular jika setiap elemen di S merupakan elemen reguler.*

Salah satu contoh dari semigrup reguler disajikan dalam Contoh 1.

Contoh 1

Misalkan $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1 | m \in \mathbb{Z}^+\}$ adalah himpunan bilangan bulat modulo m. Didefinisikan operasi penjumlahan bilangan bulat modulo m pada $\mathbb{Z}_m$ yaitu $a \oplus_m b = (a+b) \bmod m$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_m$. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}_m$ yang dilengkapi dengan operasi $\oplus_m$, dinotasikan dengan $(\mathbb{Z}_m, \oplus_m)$ merupakan semigrup reguler. Berikut penjelasannya.

Operasi $\oplus_m$ merupakan operasi biner di $\mathbb{Z}_m$, sebab untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_m$ berlaku $a \oplus_m b = (a + b) \bmod m \in \mathbb{Z}_m$. Selanjutnya, operasi $\oplus_m$ pada $\mathbb{Z}_m$ bersifat asosiatif, sebab untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_m$ berlaku

$$\begin{aligned} a \oplus_m (b \oplus_m c) &= a \oplus_m \left((b+c) \bmod m\right) \\ &= \left(\left(a+(b+c)\right) \bmod m\right) \bmod m \\ &= \left(\left((a+b)+c\right) \bmod m\right) \bmod m \\ &= \left(\left((a+b) \bmod m\right)+c\right) \bmod m \\ &= (a+b) \bmod m \oplus_m c \\ &= (a \oplus_m b) \oplus_m c. \end{aligned}$$

Hal ini berarti $(\mathbb{Z}_m, \oplus_m)$ merupakan semigrup. Diketahui $\mathbb{Z}_m$ adalah himpunan bilangan bulat modulo m, maka terhadap operasi $\oplus_m$, jika diambil sembarang $a \in \mathbb{Z}_m$, maka selalu terdapat $-a \in \mathbb{Z}_m$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} a \oplus_m (-a) &= (a - a) \bmod m \\ &= 0 \bmod m \\ &= 0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} (-a) \oplus_m a &= (-a + a) \bmod m \\ &= 0 \bmod m \\ &= 0 \end{aligned}$$

dengan 0 adalah elemen identitas di $(\mathbb{Z}_m, \oplus_m)$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} a \oplus_m (-a) \oplus_m a &= (a - a) \bmod m \oplus_m a \\ &= 0 \oplus_m a \\ &= (0 + a) \bmod m \\ &= a \bmod m \\ &= a \end{aligned}$$

Karena setiap $a \in \mathbb{Z}_m$ merupakan elemen reguler, maka $(\mathbb{Z}_m, \oplus_m)$ adalah semigrup reguler. ■

Tidak semua semigrup merupakan semigrup reguler, seperti yang diperlihatkan dalam Contoh 2 berikut.

Contoh 2

Misalkan diberikan semigrup himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi dengan operasi perkalian biasa, dinotasikan dengan $(\mathbb{Z}, \times)$. Sistem matematika $(\mathbb{Z}, \times)$ bukan semigrup reguler, sebab elemen reguler di $(\mathbb{Z}, \times)$hanya -1, 0 dan 1. ■

Selanjutnya sifat-sifat dari semigrup reguler disajikan dalam beberapa subbab berikut.

2.1 Hasil Kali Cartesius Dua Semigrup Reguler

Jika dipunyai dua semigrup reguler, maka hasil kali Cartesius dari dua semigrup reguler juga merupakan semigrup reguler, seperti yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 1 *Jika* $(U,*)$ *dan* $(V,\circ)$ *masing masing adalah semigrup reguler, maka hasil kali Cartesius dari semigrup reguler* $(U,*)$ *dan semigrup reguler* $(V,\circ)$ *merupakan semigrup reguler, yang dilambangkan dengan* $(U \times V, \bullet)$, *dan operasi elemen-elemennya diberikan oleh*

$$(u_1, v_1) \bullet (u_2, v_2) = (u_1 * u_2,\ v_1 \circ v_2)$$

untuk setiap $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in U \times V$.

Bukti

Diketahui $(U,*)$ dan $(V,\circ)$ merupakan semigrup reguler, maka untuk setiap $u \in U$ terdapat $u' \in U$ sedemikian sehingga berlaku $u * u' * u = u$ dan untuk setiap $v \in V$ terdapat $v' \in V$ sedemikian sehingga berlaku $v \circ v' \circ v = v$.

Diketahui $(u, v) \in U \times V$ maka $u \in U$ dan $v \in V$, dengan U, V masing masing adalah semigrup reguler. Dengan demikian diperoleh,

$$[(u * u') * u, (v \circ v') \circ v] = (u, v).$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa setiap elemen pada $U \times V$ merupakan elemen reguler. Ambil sebarang $(u, v) \in U \times V$terdapat $(u', v') \in U \times V$ sedemikian sehingga berlaku

$$\begin{aligned}(u, v) \bullet (u', v') \bullet (u, v) &= (u * u', v \circ v') \bullet (u, v) \\ &= [(u * u') * u, (v \circ v') \circ v]. \\ &= (u, v).\end{aligned}$$

Ini membuktikan bahwa $(U \times V,\ \bullet)$ juga merupakan semigrup reguler. ■

Contoh dari hasil kali Cartesius dari dua semigrup reguler disajikan dalam Contoh 3.

Contoh 3

Diketahui $(\mathbb{Z}_2, \otimes_2)$ dan $(\mathbb{Z}_3,\ \oplus_3)$ merupakan semigrup. Selanjutnya $(\mathbb{Z}_2, \otimes_2)$ dan $(\mathbb{Z}_3, \oplus)$ merupakan semigrup reguler, sebab pada Tabel 1 nampak bahwa untuk $0 \in \mathbb{Z}_2$,dan untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_2$ berlaku $0 \otimes_2 a \otimes_2 0 = 0$. Untuk $1 \in \mathbb{Z}_2$, terdapat $1 \in \mathbb{Z}_2$ sedemikian sehingga $1 \otimes_2 1 \otimes_2 1 = 1$. Kemudian pada Tabel 2, terlihat bahwa untuk $0 \in \mathbb{Z}_3$, terdapat $0 \in$ ℤ_3 berlaku $0 \oplus_3 0 \oplus_3 0 = 0$. Untuk $1 \in \mathbb{Z}_3$, terdapat $2 \in \mathbb{Z}_3$ sedemikian sehingga $1 \oplus_3 2 \oplus_3 1 = 1$. Untuk $2 \in \mathbb{Z}_3$, terdapat $1 \in \mathbb{Z}_3$ sedemikian sehingga $2 \oplus_3 1 \oplus_3 2 = 2$

Selanjutnya, telah diketahui bahwa hasil kali Cartesius $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3,\ \bullet)$ merupakan semigrup. Hasil kali ini disajikan dalam Tabel 3. Semigrup $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3,\ \bullet)$ merupakan semigrup reguler karena untuk $(0, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ terdapat $(0, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ sedemikian sehingga

$$(0, 0) \bullet (0,0) \bullet (0,0) = (0, 0),$$

untuk $(0, 1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ terdapat $(0, 1) \epsilon\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ sedemikian sehingga

$$(0, 1) \bullet (0,1) \bullet (0,1) = (0, 1),$$

untuk $(0, 2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ terdapat $(0, 1) \epsilon\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ sedemikian sehingga

$$(0, 2) \bullet (0,1) \bullet (0,2) = (0, 2),$$

untuk $(1, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ terdapat $(1, 0) \epsilon\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ sedemikian sehingga

$$(1, 0) \bullet (1,0) \bullet (1,0) = (1, 0),$$

untuk $(1,1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ terdapat $(1,2) \epsilon\, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ sedemikian sehingga

$$(1,1) \bullet (1,2) \bullet (1,1) = (1,1),$$

untuk $(1,2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ terdapat $(1,1) \epsilon\, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ sedemikian sehingga

$$(1,2) \bullet (1,1) \bullet (1,2) = (1,2).$$

Jadi terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \bullet)$ adalah semigrup reguler. ■

Tabel 1 Hasil operasi $\otimes_2$ di $\mathbb{Z}_2$

$\otimes_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabel 2 Hasil operasi $\oplus_3$ di $\mathbb{Z}_3$

$\oplus_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Tabel 3 Hasil operasi $\bullet$ di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

$\bullet$	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)
(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)
(0, 1)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)
(0, 2)	(0, 0)	(0, 2)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 2)	(1, 1)
(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
(1, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)
(1, 2)	(1, 0)	(1, 2)	(1, 1)	(0, 0)	(0, 2)	(0, 1)

2.2 Keterkaitan antara Semigrup Reguler dengan Grup dan Semigrup Lainnya

Grup merupakan semigrup yang dilengkapi dengan elemen satuan dan elemen invers. Keterkaitan antara grup dengan semigrup reguler diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2 *Setiap grup merupakan semigrup reguler.*

Bukti

Jika $(G,*)$ merupakan grup, maka operasi * pada $(G,*)$ bersifat biner dan assosiatif. Jadi, $(G,*)$ adalah semigrup. Selanjutnya, setiap a elemen di G memiliki invers, yaitu $a^{-1} \epsilon G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ dengan *e* merupakan elemen identitas pada *G* terhadap operasi *. Perhatikan bahwa

$$a * a^{-1} = e$$
$$\Leftrightarrow a * a^{-1} * a = e * a$$
$$\Leftrightarrow a * a^{-1} * a = a$$

dan

$$a^{-1} * a = e$$
$$\Leftrightarrow a * a^{-1} * a = a * e$$
$$\Leftrightarrow a * a^{-1} * a = a$$

Jadi untuk setiap $a \epsilon G$ terdapat $a^{-1} \epsilon G$ yang memenuhi $a * a^{-1} * a = a$. Dengan demikian, grup $(G,*)$ merupakan semigrup reguler. ■

Berikut ini merupakan contoh keterkaitan semigrup reguler dengan grup.

Contoh 4

Misalkan $(\boldsymbol{M_{nxn}}(\mathbb{R}), +)$ adalah himpunan matriks berordo $n \times n$ yaitu

$$\boldsymbol{M_{nxn}}(R) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, a_{11}, \dots, a_{nn} \in \mathbb{R} \right\}$$

yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan matriks. Diketahui $(\boldsymbol{M_{nxn}}(\mathbb{R}), +)$ adalah grup. Menurut Teorema 2 yaitu setiap grup merupakan semigrup reguler maka berlaku bahwa $(\boldsymbol{M_{nxn}}(\mathbb{R}), +)$ juga merupakan semigrup reguler. ■

Selain semigrup reguler, ada beberapa jenis semigrup yang lainnya, yang diantaranya adalah semigrup idempoten (yang disebut juga *band*) dan semigrup invers. Semigrup yang setiap elemennya berupa elemen idempoten disebut semigrup idempoten. Elemen x di $(S,*)$ disebut elemen idempoten jika memenuhi $x * x = x$. Semigrup $(S,*)$ disebut semigrup invers jika untuk setiap $a \in S$ terdapat dengan tunggal $a^{-1} \in S$ sehingga $a * a^{-1} * a = a$ dan $a^{-1} * a * a^{-1} = a^{-1}$. Sifat-sifat dari semigrup idempoten dapat dilihat antara lain pada (Baader, 1987) dan (Almeida, dkk., 1992), sedangkan sifat-sifat dari semigrup invers dapat dilihat pada (Srinivas dan Nandakumar, 2009) dan (Cherubini dan Frigeri, 2019). Keterkaitan antara semigrup reguler dengan semigrup idempoten disajikan dalam Teorema 3.

Teorema 3 *Misalkan* $(S,*)$ *merupakan semigrup idempoten, maka* $(S,*)$ *merupakan semigrup reguler.*

Bukti

Misalkan $(S,*)$ merupakan semigrup idempoten. Jika diambil *x* sembarang elemen di *S*, maka berlaku

$$x * x = x$$

$$x * x * x = x * x = x$$

Dengan demikian, *S* adalah semigrup reguler. ■

Berikut ini merupakan contoh keterkaitan semigrup reguler dengan semigrup idempoten.

Contoh 5

Diketahui $(\mathbf{S},\times)$ merupakan semigrup idempoten dengan $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ yang dilengkapi dengan operasi perkalian matriks, maka berdasarkan teorema 3 diperoleh bahwa $(\mathbf{S},\times)$merupakan semigrup reguler. ■

Selanjutnya, diberikan teorema tentang keterkaitan semigrup reguler dengan semigrup invers sebagai berikut.

Teorema 4 *Misalkan* $(S,*)$ *merupakan semigrup invers, maka* $(S,*)$ *merupakan semigrup reguler.*

Bukti

Misalkan $(S,*)$ merupakan semigrup invers. Diambil sembarang $a \epsilon S$. Jadi, a mempunyai invers a^{-1} yaitu yang memenuhi

$$a * a^{-1} * a = a \text{ dan } a^{-1} * a * a^{-1} = a^{-1}.$$

Karena untuk setiap $a \epsilon S$ berlaku $a * a^{-1} * a = a$, maka $(S,*)$ merupakan semigrup reguler. ■

Keterkaitan semigrup reguler dengan semigrup invers diilustrasikan dalam contoh berikut.

Contoh 6

Diketahui $(\mathbb{Z}_7, \otimes_7)$ merupakan semigrup invers. Jadi menurut teorema 6 diperoleh bahwa $(\mathbb{Z}_7, \otimes_7)$. merupakan semigrup reguler. ■

3. KESIMPULAN DAN SARAN

Semigrup reguler adalah semigrup yang setiap elemennya merupakan elemen reguler. Elemen a pada semigrup $(S,*)$dengan $a * b * a = a$ untuk suatu $b \in S$ disebut elemen reguler. Contoh dari semigrup reguler antara lain adalah himpunan bilangan bulat modulo m yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan modulo m, himpunan polinom bererajat n atas R dengan indeterminate x yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan polinom. Salah satu sifat semigrup reguler mempunyai yaitu hasil kali Cartesius dua semigrup reguler merupakan semigrup reguler. Semigrup reguler juga mempunyai kaitan dengan grup dan semigrup lainnya yaitu suatu grup pasti merupakan semigrup reguler. Selain itu, *band* dan semigrup invers juga merupakan semigrup reguler.

Pada artikel ini telah dikaji keterkaitan antara semigrup reguler dengan semigrup idempoten dan semigrup invers. Penelitian selanjutnya dapat mengkaji keterkaitan semigrup reguler dengan semigrup yang lainnya, seperti komutatif dan kanselatif semigrup.

DAFTAR PUSTAKA

Almeida, J., Pin, J-E., Weil, P., *Semigroups whose Idempoten form a Subsemigroups*. Mathematical Proceedings, Cambridge University Press (CUP), **111** (1992), 241 – 253.

Baader, F., *Unification in Varieties of Idempoten Semigroups*, Semigroup Forum**,** **36** (1987), 127 – 145.

Cherubini, A., Frigeri, A., *Inverse Semigroups with Apartness*, Semigroup Forum, **98** (2019), 571 – 588.

Howie, J.M., *An Introduction to Semigrup Theory*, 3rd Edition, Academic Press, London, 1976.

Lang, S., *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, United States of America , 1993..

Lidl, R., Pilz, G., *Applied Abstract Algebra*, 2nd Edition, Spinger-Verlag, New York, 1998.

Srinivas, K. V. R., Nandakumar, *Algebraic Properties and Examples of Inverse Semigroups*, Proyecciones Journal of Mathematics, **28** (2009), 227 – 232.

Widyanesti, S., Wahyuni, S., Semigrup Legal dan Beberapa Sifatnya, *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika, 3 Desember 2011,* Universitas Negeri Yogyakarta, 2011.