JMP : Volume 4 Nomor 2, Desember 2012, hal. 279 - 288

MODUL FAKTOR YANG DIBENTUK DARI SUBMODUL $\mathbb{Z}^2$ PADA MODUL $\mathbb{R}^2$ ATAS *GAUSSIAN INTEGERS*

Ari Wardayani

Universitas Jenderal Soedirman
ariwardayani@yahoo.co.id

ABSTRACT. *We prove that $\mathbb{R}^2$ is module over Gaussian Intergers and the set of all coset of submodule $\mathbb{Z}^2$ in module $\mathbb{R}^2$ over Gaussian Integers is a quotient module. We find the proof by showing that $\mathbb{R}^2$ is both a right module and a left module over Gaussian Integers and showing that the set of all coset of submodule $\mathbb{Z}^2$ in module $\mathbb{R}^2$ is both a right module and a left module over Gaussian Integers.*

Key word: *module, submodule, coset, quotient module*

ABSTRAK. *Pada makalah ini dibuktikan bahwa $\mathbb{R}^2$ adalah modul atas Gaussian Integers dan himpunan semua koset dari submodul $\mathbb{Z}^2$ pada modul $\mathbb{R}^2$ atas Gaussian Integers merupakan modul faktor. Bukti diperoleh dengan menunjukkan bahwa $\mathbb{R}^2$ adalah modul kiri sekaligus modul kanan atas Gaussian Integers dan menunjukkan bahwa himpunan semua koset dari submodul $\mathbb{Z}^2$ pada $\mathbb{R}^2$ merupakan modul kanan sekaligus modul kiri atas Gaussian Integers.*

Kata kunci: *modul, submodul, koset, modul faktor*

1. PENDAHULUAN

Modul merupakan suatu struktur yang dibentuk dari suatu grup abel dan suatu ring dengan elemen satuan. Misalkan M adalah grup abel terhadap operasi penjumlahan dan R adalah ring dengan elemen satuan, modul kiri M atas ring R adalah struktur yang dibentuk oleh M dan R yang dilengkapi dengan operasi pergandaan skalar

$$(\forall r \in \mathrm{R})(\forall m \in \mathrm{M}),\ r\ m \in \mathrm{M}$$

dan memenuhi aksioma:

1. $(\forall r \in \mathrm{R})(\forall m_1, m_2 \in \mathrm{M}),\ r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$
2. $(\forall r_1, r_2 \in \mathrm{R})(\forall m \in \mathrm{M}),\ (r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$

3. $\left(\forall r_1, r_2 \in \mathrm{R}\right)\left(\forall m \in \mathrm{M}\right),\ \left(r_1 r_2\right)m = r_1\left(r_2 m\right)$
4. $\left(\forall m \in \mathrm{M}\right),\ 1m = m$ dengan 1 adalah elemen satuan R.

Definisi modul kanan M atas ring R analog dengan modul kiri, tetapi pada operasi pergandaan skalarnya, elemen-elemen r di R dituliskan disebelah kanan (Hartley, dkk., 1970). Himpunan bagian tak kosong dari suatu modul disebut submodul jika himpunan bagian tersebut dilengkapi dengan operasi yang sama dengan operasi di modulnya, juga membentuk modul (Adkins, 1972). Sementara itu modul faktor adalah suatu modul yang dihasilkan oleh suatu submodul dari modul yang diberikan (Lang, 1995).

Gaussian Integers merupakan himpunan bagian dari himpunan bilangan kompleks (Muchlisah, 2008) dan dinotasikan dengan

$$\mathbb{Z}(i) = \left\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ dan } i = \sqrt{-1}\right\}$$

Menurut Fraleigh (2000), *Gaussian Integers* $\mathbb{Z}(i)$ merupakan daerah integral, yaitu ring komutatif dengan elemen satuan yang tidak memuat pembagi nol.

Himpunan $\mathbb{R}^2$ adalah himpunan dari semua elemen yang berbentuk 2-tupel dengan setiap tupelnya merupakan bilangan riil (Anton, 1993). Himpunan $\mathbb{R}^2$ dinotasikan dengan

$$\mathbb{R}^2 = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} | x, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Menurut Jacob (1990), $\mathbb{R}^2$ merupakan ruang vektor atas lapangan himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$. Hal ini mengakibatkan bahwa $\mathbb{R}^2$ adalah grup abel terhadap operasi penjumlahannya.

2. PEMBENTUKAN MODUL $\mathbb{R}^2$ ATAS *GAUSSIAN INTEGERS* $\mathbb{Z}(i)$

Sebelum membuktikan $\mathbb{R}^2$ adalah modul atas *Gaussian Integers* $\mathbb{Z}(i)$, terlebih dahulu didefinisikan operasi pergandaan skalar antara $\mathbb{Z}(i)$ dan $\mathbb{R}^2$ yakni:

$$(a+bi)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} := \begin{bmatrix}ax_1-bx_2\\ax_2+bx_1\end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}(a+bi) := \begin{bmatrix}ax_1-bx_2\\ax_2+bx_1\end{bmatrix},$$

untuk setiap $(a+bi) \in \mathbb{Z}(i)$, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa dengan operasi pergandaan skalar yang didefinisikan tersebut, $\mathbb{R}^2$ memenuhi aksioma-aksioma modul kiri dan modul kanan atas *Gaussian Integers* $\mathbb{Z}(i)$.

Proposisi 1. Himpunan $\mathbb{R}^2$ adalah modul atas *Gaussian Integers* $\mathbb{Z}(i)$ dengan operasi pergandaan skalar

$$(a+bi)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} := \begin{bmatrix}ax_1-bx_2\\ax_2+bx_1\end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}(a+bi) := \begin{bmatrix}ax_1-bx_2\\ax_2+bx_1\end{bmatrix},$$

untuk setiap $(a+bi) \in \mathbb{Z}(i)$, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Bukti. Pembuktian diawali dengan menunjukkan bahwa operasi yang didefinisikan tersebut adalah *well-defined*. Ambil sembarang $(a+bi), (c+di) \in \mathbb{Z}(i)$ dengan $(a+bi) = (c+di)$, dan $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ dengan $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$. Jika $(a+bi) = (c+di)$ dan $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ maka

$$(a+bi)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax_1-bx_2\\ax_2+bx_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}cy_1-dy_2\\cy_2+dy_1\end{bmatrix} = (c+di)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} \quad \text{dan}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}(a+bi) = \begin{bmatrix}ax_1-bx_2\\ax_2+bx_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}cy_1-dy_2\\cy_2+dy_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}(c+di).$$

Jadi operasi pergandaan skalar yang didefinisikan tersebut *well-defined*. Selanjutnya ditunjukkan bahwa aksioma-aksioma modul kiri dipenuhi:

(i). $\big((a+bi)+(c+di)\big)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \big((a+c)+(b+d)i\big)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}(a+c)x_1-(b+d)x_2\\(a+c)x_2+(b+d)x_1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}ax_1-bx_2\\ax_2+bx_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}cx_1-dx_2\\cx_2+bdx_1\end{bmatrix}$$

$$= (a+bi)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (c+di)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(ii). $(a+bi)\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = (a+bi)\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x_1+y_1)-b(x_2+y_2) \\ a(x_2+y_2)+b(x_1+y_1) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ax_1-bx_2 \\ ax_2+bx_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ay_1-by_2 \\ ay_2+by_1 \end{bmatrix}$$

$$= (a+bi)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (a+bi)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

(iii). $\big((a+bi)(c+di)\big)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \big((ac-bd)+(ad+bc)i\big)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (ac-bd)x_1-(ad+bc)x_2 \\ (ac-bd)x_2+(ad+bc)x_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (acx_1-adx_2)-(bcx_2+bdx_1) \\ (acx_2+adx_1)+(bcx_1-bdx_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(cx_1-dx_2)-b(cx_2+dx_1) \\ a(cx_2+dx_1)+b(cx_1-dx_2) \end{bmatrix}$$

$$= (a+bi)\begin{bmatrix} cx_1-dx_2 \\ cx_2+dx_1 \end{bmatrix}$$

$$= (a+bi)\left((c+di)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$$

(iv). $1\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (1+0i)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Karena $\mathbb{R}^2$ memenuhi aksioma-aksioma modul kiri atas *Gaussian Integers* $\mathbb{Z}(i)$, maka $\mathbb{R}^2$ adalah modul kiri atas *Gaussian Integers* $\mathbb{Z}(i)$. Secara analog diperoleh bahwa $\mathbb{R}^2$ adalah modul kanan atas *Gaussian Integers* $\mathbb{Z}(i)$. Kemudian karena $\mathbb{R}^2$ adalah modul kiri sekaligus modul kanan atas *Gaussian Integers* $\mathbb{Z}(i)$ maka $\mathbb{R}^2$ adalah modul atas *Gaussian Integers*$\mathbb{Z}(i)$.■

Selanjutnya, struktur modul $\mathbb{R}^2$ atas *Gaussian Integer* $\mathbb{Z}(i)$ ini akan digunakan untuk membentuk submodul, koset, dan pada akhirnya digunakan untuk membentuk modul faktor yang diinginkan.

3. PEMBENTUKAN MODUL FAKTOR DARI SUBMODUL $\mathbb{Z}^2$

Pada makalah ini, pembentukan modul faktor menggunakan $\mathbb{Z}^2$ yaitu himpunan bagian dari $\mathbb{R}^2$. Pembentukan modul faktor diawali dengan menunjukkan bahwa $\mathbb{Z}^2$ adalah submodul dari $\mathbb{R}^2$. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut. Dengan pendefinisian

$$\mathbb{Z}^2 := \left\{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} | z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\right\}$$

jelas bahwa $\mathbb{Z}^2$ adalah himpunan bagian dari $\mathbb{R}^2$yang tak kosong, sebab dengan mengambil z_1, z_2 sembarang elemen di $\mathbb{Z}$ selalu dapat ditentukan $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^2$. Kemudian, $\mathbb{Z}^2$ juga merupakan submodul dari modul $\mathbb{R}^2$ atas $\mathbb{Z}(i)$ karena untuk setiap $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ dan $a + bi \in \mathbb{Z}(i)$ berlaku:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 - y_1 \\ z_2 - y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \quad \text{dan } (a + bi)\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az_1 - bz_2 \\ az_2 + bz_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^2.$$

Selanjutnya didefinisikan himpunan $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2} := \left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \mathbb{Z}^2 | \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2\right\}$

yaitu himpunan semua koset submodul $\mathbb{Z}^2$ pada modul $\mathbb{R}^2$ atas $\mathbb{Z}(i)$. Untuk penyederhanaan penulisan, selanjutnya $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \mathbb{Z}^2 \in \mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ ditulis dengan $\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$.

Proposisi 2. *Himpunan* $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ *merupakan modul faktor yang dihasilkan oleh* $\mathbb{Z}^2$ *pada modul* $\mathbb{R}^2$ *atas Gaussian Integer* $\mathbb{Z}(i)$ *dengan operasi penjumlahan dan pergandaan skalar yang didefinisikan sebagai berikut*:

untuk setiap $\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}, \overline{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}} \in \mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ *dan* $a + bi \in \mathbb{Z}(i)$ *berlaku* $\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} + \overline{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}} =$

$\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}$,

$$(a+bi)\overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}} = \overline{(a+bi)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}} \; dan \; \overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}}(a+bi) = \overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}(a+bi)}.$$

Bukti. Terlebih dahulu ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan koset yang didefinisikan tersebut adalah *well-defined*. Ambil sembarang $\overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}}, \overline{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}}, \overline{\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}}, \overline{\begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix}} \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dengan $\overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}}$ dan $\overline{\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix}}$. Jika $\overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}}$ maka $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \mathbb{Z}^2 = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} + \mathbb{Z}^2$. Menurut sifat koset, jika $\overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}}$ mengakibatkan $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^2$. Kemudian, jika $\overline{\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix}}$ maka $\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix} + \mathbb{Z}^2 = \begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix} + \mathbb{Z}^2$. Dengan demikian juga diperoleh $\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^2$.

Kemudian, $\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}\right) - \left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix}\right) \in \mathbb{Z}^2$. Sebagai akibatnya $\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}\right) + \mathbb{Z}^2 = \left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix}\right) + \mathbb{Z}^2$, yang mengimplikasikan bahwa $\overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix}}$. Dengan kata lain, $\overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}} + \overline{\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}} + \overline{\begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix}}$.

Berikut ini ditunjukkan bahwa operasi pergandaan skalar yang didefinisikan tersebut juga *well-defined*.

$$(a+bi)\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right) = (a+bi)\begin{bmatrix}x_1-y_1\\x_2-y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a(x_1-y_1)-b(x_2-y_2)\\a(x_2-y_2)+b(x_1-y_1)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}ax_1-bx_2\\ax_2+bx_1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}ay_1-by_2\\ay_2+by_1\end{bmatrix}$$

$$= (a+bi)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} - (a+bi)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^2.$$

Hal ini mengakibatkan $(a+bi)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \mathbb{Z}^2 = (a+bi)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} + \mathbb{Z}^2$, yakni

$$\overline{(a+b\imath)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}} = \overline{(a+b\imath)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}}.$$

Dengan kata lain, $(a+bi)\overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}} = (a+bi)\overline{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}}$. Secara analog diperoleh bahwa

$$\overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}}(a+bi) = \overline{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}}(a+bi).$$

Jadi operasi penjumlahan dan pergandaan skalar yang didefinisikan tersebut adalah *well defined*.

Berikutnya ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ dengan operasi penjumlahan dan pergandaan skalar yang didefinisikan di atas merupakan modul atas $\mathbb{Z}(i)$. Langkah pertama adalah menunjukkan bahwa $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ terhadap operasi penjumlahannya merupakan grup abel. Untuk setiap $\overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}}, \overline{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}} \in \mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$, berlaku $\overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}} + \overline{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}} \in \mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$. Hal ini berarti operasi penjumlahannya tertutup pada $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$. Selain itu, untuk setiap $\overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}}, \overline{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}}, \overline{\begin{bmatrix}s_1\\s_2\end{bmatrix}} \in \mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ berlaku $\left(\overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}} + \overline{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}}\right) + \overline{\begin{bmatrix}s_1\\s_2\end{bmatrix}} =$ $\left(\overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}}\right) + \overline{\begin{bmatrix}s_1\\s_2\end{bmatrix}} = \overline{\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix}s_1\\s_2\end{bmatrix}}$

$$= \overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}s_1\\s_2\end{bmatrix}\right)} = \overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}} + \overline{\left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}s_1\\s_2\end{bmatrix}\right)} = \overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}} + \left(\overline{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}} + \overline{\begin{bmatrix}s_1\\s_2\end{bmatrix}}\right).$$

Selanjutnya,

$$\overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}} + \overline{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}} + \overline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}}.$$

Jadi operasi penjumlahan pada $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ bersifat assosiatif dan komutatif. Eksistensi elemen netral pada $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ juga dipenuhi, karena terdapat $\overline{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} \in \mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ berlaku $\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} + \overline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$. Selanjutnya, eksistensi invers dari setiap elemen di $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ dipenuhi, karena untuk setiap $\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} \in \mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ mempunyai invers yaitu $-\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}}$ sedemikian sehingga $\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} + \overline{\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$. Karena $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ terhadap operasi penjumlahannya memenuhi aksioma-aksioma grup dan bersifat komutatif, maka $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ adalah grup abel.

Untuk membuktikan bahwa $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ adalah modul kiri atas $\mathbb{Z}(i)$, haruslah dibuktikan bahwa dengan operasi pergandaan skalar yang didefinisikan, $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ memenuhi aksioma-aksioma modul. Ambil sembarang $a + bi\,, c + di \in \mathbb{Z}(i)$ dan $\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}, \overline{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}} \in \mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$. Kemudian

(i) $$\big((a+bi)+(c+di)\big)\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \big((a+c)+(b+d)i\big)\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$$

$$= \overline{\big((a+c)+(b+d)\imath\big)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$$

$$= \overline{\begin{bmatrix} (a+c)x_1 - (b+d)x_2 \\ (a+c)x_2 + (b+d)x_1 \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} ax_1 - bx_2 \\ ax_2 + bx_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cx_1 - dx_2 \\ cx_2 + dx_1 \end{bmatrix}}$$

$$= \overline{(a+b\imath)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (c+d\imath)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = (a+bi)\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} + (c+di)\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$$

(ii) $$(a+bi)\left(\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} + \overline{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}\right) = (a+bi)\left(\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}\right) = (a+bi)\left(\overline{\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}}\right)$$

$$= \overline{\begin{bmatrix} a(x_1+y_1) - b(x_2+y_2) \\ a(x_2+y_2) + b(x_1+y_1) \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} ax_1 - bx_2 \\ ax_2 + bx_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ay_1 - by_2 \\ ay_2 + by_1 \end{bmatrix}}$$

$$= (a+bi)\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} + (a+bi)\overline{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}.$$

(iii) $\big((a+bi).(c+di)\big)\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \big((ac+bd)+(ad+bc)i\big)\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$

$$= \overline{\begin{bmatrix} (ac+bd)x_1 - (ad+bc)x_2 \\ (ac+bd)x_2 + (ad+bc)x_1 \end{bmatrix}}$$

$$= \overline{(a+bi)\begin{bmatrix} cx_1 - dx_2 \\ cx_2 + dx_1 \end{bmatrix}}$$

$$= (a+bi)\overline{\begin{bmatrix} cx_1 - dx_2 \\ cx_2 + dx_1 \end{bmatrix}} = (a+bi)\overline{(c+di)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$$

(iv) $1\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = (1+0i)\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$

Karena $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ memenuhi aksioma-aksioma modul kiri atas $\mathbb{Z}(i)$, maka $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ adalah modul kiri atas *Gaussian Integers* $\mathbb{Z}(i)$. Secara analog diperoleh bahwa $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ adalah modul kanan atas *Gaussian Integesr* $\mathbb{Z}(i)$. Karena $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ adalah modul kiri dan modul kanan atas *Gaussian Integers* $\mathbb{Z}(i)$, maka $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ adalah modul atas *Gaussian Integers* $\mathbb{Z}(i)$. Untuk selanjutnya $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dinamakan modul faktor atas *Gaussian Integers* $\mathbb{Z}(i)$. ■

4. KESIMPULAN

Himpunan $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dengan operasi penjumlahan dan pergandaan skalar yang didefinisikan tersebut memenuhi aksioma-aksioma modul atas *Gaussian Integers* $\mathbb{Z}(i)$. Modul $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ atas *Gaussian Integers* $\mathbb{Z}(i)$ adalah modul faktor yang dihasilkan oleh $\mathbb{Z}^2$ pada modul $\mathbb{R}^2$ atas *Gaussian Integers* $\mathbb{Z}(i)$.

5. DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. (1993). *Aljabar Linier Elementer.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Adkins, W. (1972). *Algebra*: *an Approach Via Module Theory*. New York: Springer-Velberg.

Fraleigh, J.B. (2000). *A First Course in Abstract Algebra*. New York: Addison-Wesley Publising Company, Inc.

Hartley, B. dan Hawkes, T.O. (1970). *Rings, Modules and Linear Algebra.* London: Chapman and Hall, Ltd.

Jacob, B. (1990). *Linear Algebra*. New York: W. H. Freeman and Company.

Lang, S. (1995). *Algebra*. New York: Addison-Wesley Publishing Company.

Muchlisah, N. (2008). *Teori Gelanggang dan Lapangan*. Surakarta: LPP UNS.