JMP : Volume 4 Nomor 1, Juni 2012, hal. 233 - 240

HUBUNGAN ANTARA NILAI KRITIS DERIVATIF-F^{α} DENGAN DIMENSI-γ DARI SUATU KURVA

Supriyadi Wibowo
Jurusan Matematika F MIPA UNS Surakarta
Email. supriyadi_w@yahoo.co.id

ABSTRACT. *Continue function that defined on fractal set $F \subset R$ is a function which has irregular structure, that can not be an ordinary differentiable on F. In this paper will be explored the correlation between critical point of the derivatif F^{α} with dimension-γ of a curve. By using the properties of the derivative F^{α} , Holder's continue function in rank of α and dimension γ, has been obtained the correlation between critical value of derivative F^{α} and the dimension γ of a curve.*

Keywords. *Derivate F^{α} order $\alpha \in (0,1)$, Holder's continue function in rank of α and dimension γ*

ABSTRAK. *Fungsi kontinu yang terdefinisi pada himpunan fraktal $F \subset R$ adalah fungsi yang mempunyai struktur yang tidak teratur, sehingga tidak terdiferensial biasa pada F. Dalam makalah ini akan diselidiki hubungan antara nilai kritis dari derivatif-F^{α} dengan dimensi-γ dari suatu kurva. Dengan menggunakan sifat-sifat derivatif-F^{α}, fungsi kontinu Holder berpangkat-α dan dimensi- γ, diperoleh hubungan antara nilai kritis derivatif-F^{α} dengan dimensi-γ dari suatu kurva.*

Kata kunci. *derivatif- F^{α} berorder $\alpha \in (0,1)$, fungsi kontinu Holder berpangkat-α, dimensi-γ.*

1. PENDAHULUAN

Kolwankar dan Gangal (1996) serta Kolwankar (1997) telah meneliti hubungan antara nilai kritis dari derivatif pecahan (*fractional derivative*) dengan dimensi kotak (*box dimension*) dari suatu kurva. Sedangkan dalam penelitian ini akan diselidiki hubungan antara nilai kritis dari derivatif-F^{α} dengan dimensi-γ dari suatu kurva.

Diberikan *F* himpunan bagian bilangan real, berikut akan diberikan komponen *(component)*, *coarse-grained mass* (cgm) dan fungsi anak tangga (*staircase function*) pada himpunan *F*.

Definisi 1.1 (Parvate.A and Gangal.A.D, 2003) *Subdivisi (subdivision)* $P_{[a,b]}$ *(P) dari interval* $[a,b], a<b$ *adalah himpunan titik-titik berhingga* $\{a=x_0, x_1, ..., x_n=b\}, x_i<x_{i+1}$. *Sebarang interval yang berbentuk* $[x_i, x_{i+1}]$ *disebut interval komponen (component interval) atau komponen (component) dari subdivisi P. Jika Q adalah sebarang subdivisi dari* $[a,b]$ *dan* $P \subset Q$*, maka dikatakan Q sebagai penghalus dari P. Jika* $a=b$*, maka himpunan* $\{a\}$ *adalah hanya subdivisi dari* $[a,b]$.

Definisi 1.2 (Parvate and Gangal, 2003) *Diberikan* $\delta>0$ *dan* $a \le b$*, coarse-grained mass (cgm) dari* $F \cap [a,b]$ *dituliskan* $\gamma_\delta^\alpha(F,a,b)$ *dan didefinisikan dengan*

$$\gamma^\alpha(F,a,b) = \lim_{\delta\to 0} \inf_{\{P_{[a,b]}:|P|\le\delta\}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \theta\left(F,[x_i,x_{i+1}]\right)$$

dengan $|P| = \max_{o\le i\le n-1}(x_{i+1}-x_i)$ *dan* $\theta\left(F,[x_i,x_{i+1}]\right)=1$, *jika* $F \bigcap [x_i, x_{i+1}]$ *tidak kosong dan bernilai nol untuk yang lain untuk* $x_i = 0,1,...,n-1$.

Definisi 1.3 (Parvate and Gangal, 2003) *Misalkan* a_0 *adalah sebarang bilangan real tetapi tertentu. Fungsi integral anak tangga (staircase function)* $S_F^\alpha(x)$ *dengan order* $\alpha\in(0,1)$ *untuk himpunan F diberikan oleh*

$$S_F^\alpha(x) = \begin{cases} \gamma^\alpha(F,a_0,x), & x\ge 0 \\ -\gamma^\alpha(F,x,a_0), & x<0 \end{cases}.$$

Fungsi $S_F^\alpha(x)$ adalah fungsi anak tanggga (*staircase function*) untuk himpunan fraktal F berorder $\alpha\in(0,1)$, merupakan perumuman fungsi anak tangga Cantor (fungsi singular Cantor-Lebesgue). Dalam bagian ini akan diberikan pengertian limit fungsi dan kekontinuan $f: R\to R$ pada himpunan fraktal *F*.

Definisi 1.5 (Parvate and Gangal, 2003) *Diberikan* $F \subset R$, $f : R \rightarrow R$ *dan* $x \in F$. *Bilangan l dikatakan limit-F untuk* $y \rightarrow x$, *jika diberikan sebarang* $\varepsilon > 0$, *terdapat* $\delta > 0$ *yang memenuhi*

$$y \in F \ \ dan \ \ |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - l| < \varepsilon \ .$$

Jika bilangan tersebut ada, maka dituliskan dengan

$$l = F - \lim_{y \to x} f(y).$$

Definisi ini tidak termasuk nilai fungsi di *y* jika $y \notin F$, juga limit-*F* tidak terdefinisi di titik-titik $x \notin F$.

Selanjutnya dengan menggunakan limit-*F* akan diberikan kekontinuan-*F* .

Definisi 1.6 (Parvate and Gangal, 2003) *Fungsi* $f : R \rightarrow R$ *dikatakan kontinu-F di* $x \in F$, *jika*

$$f(x) = F - \lim_{y \to x} f(y).$$

Sebagaimana turunan order satu, turunan-F^{α} juga merupakan limit pembagian, tetapi dengan limit-*F* sedangkan penyebutnya adalah nilai dari fungsi anak tangga S_F^{α} di dua titik anggota himpunan perfek-α **(**α *-perfect***)** yaitu himpunan tertutup dan semua titiknya adalah titik limit-*F* .

Definisi 1.7 (Parvate and Gangal, 2003) *Jika F adalah himpunan perfek-*α *(*α *-perfect)* **,** *maka derivatif-* F^{α} *dari fungsi f didefinisikan oleh*

$$D_F^{\alpha}\left(f(x)\right) = \begin{cases} F - \lim\limits_{y \to x} \dfrac{f(y) - f(x)}{S_F^{\alpha}(y) - S_F^{\alpha}(x)}, & x \in F \\ 0 & , x \notin F \end{cases}$$

Jika limit-F ada.

Sebagai konsekuensi dari Definisi 1.7, mudah ditunjukkan sifat kelinearan pada derivatif-F^{α} **.**

Lema 1.8 (Parvate and Gangal, 2005) *Derivatif-* F^{α} *dari fungsi* $S_F^{\alpha}(x)$ *adalah fungsi karakteristik* $\chi_F(x)$*, yaitu*

$$D_F^{\alpha}\left(S_F^{\alpha}(x)\right) = \chi_F(x).$$

Teorema 1.9 (Parvate and Gangal, 2003) *Diberikan himpunan* $F \subset R$ *perfek-* α *dan fungsi kontinu* $f : F \subset R \to R$, $D_F^{\alpha}\left(f(x)\right)$ *ada untuk setiap* $x \in [a,b]$ dan $S_F^{\alpha}(a) \neq S_F^{\alpha}(b)$. *Maka terdapat titik* $c, d \in F$ yang *memenuhi*

$$D_F^{\alpha}\left(f(c)\right) \leq \frac{f(b)-f(a)}{S_F^{\alpha}(b)-S_F^{\alpha}(a)} \quad dan \quad \frac{f(b)-f(a)}{S_F^{\alpha}(b)-S_F^{\alpha}(a)} \leq D_F^{\alpha}\left(f(d)\right)$$

Definisi 1.10 (Wibowo, 2009) *Fungsi* $f : F \subset R \to R$ *dikatakan berorder-* α *dengan* $\alpha \in (0,1)$ *terhadap derivatif-* F^{α} *untuk setiap titik* $x \in F$*, jika*

$$\alpha = \inf\left\{\beta : D_F^{\beta}\left(f(x)\right) = \infty, 0 < \beta < 1\right\} = \sup\left\{\beta : D_F^{\beta}\left(f(x)\right) = 0, 0 < \beta < 1\right\}.$$

Fungsi kontinu $f : F \to R$ dikatakan fungsi kontinu Holder berpangkat α**,** jika terdapat konstanta $c > 0$ yang memenuhi $\left|f(y) - f(x)\right| \leq c\left|y - x\right|^{\alpha}$ untuk semua $x, y \in F$ (Ross.B *et al* ,1994/5). Jika f fungsi kontinu Holder berpangkat satu, maka f adalah fungsi Lipschitz. Nilai maksimal α yang memenuhi fungsi kontinu Holder berpangkat α adalah berhubungan dengan keberadaan derivatif fungsi f pada himpunan F **(**Spurrier.K.G, 2004).

2. PEMBAHASAN

Sedangkan dalam penelitian ini akan diselidiki hubungan antara nilai kritis dari derivatif-F^{α} dengan dimensi-γ dari suatu kurva.

Teorema 2.1 *Diberikan himpunan* $F \subset R$ *perfek-* α *dan fungsi kontinu* $f: F \to R$ *adalah pemetaan yang memenuhuhi*

$$|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^{\alpha}, x, y \in F$$

untuk suatu konstanta $c > 0$ *dan* $\alpha > 0$*, maka untuk setiap s berlaku*

$$\gamma^{s/\alpha}\big(f(F),f(a),f(b)\big) \le c^{s/\alpha}\gamma^s(F,a,b).$$

Bukti

Diberikan partisi

$P_{[a,b]} = \{a = x_1, x_2, \dots, b = x_n\}, a < b, x_i < x_{i+1}, i = 1,2,\dots,n$ dari F, oleh karena fungsi kontinu $f: F \to R$ adalah pemetaan yang memenuhuhi

$$|f(y) - f(x)| \le c|y - x|^\alpha , x, y \in F.$$

Oleh karena

$$f(F \cap [x_i, x_{i+1}]) \subset [f(x_i), f(x_{i+1})], i = 1,2,\dots n$$

maka diperoleh

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \le c|x_{i+1} - x_i|^\alpha, i = 1,2,\dots n.$$

Dibentuk partisi

$P_{[f(a),f(b)]} = \{f(a) = f(x_1), f(x_2), \dots, f(b) = f(x_n)\}, f(a) < f(b), f(x_{i+1}) < f(x_{i+1})$ dengan $i = 1,2,\dots,n$.

Partisi dari $f(F)$ adalah $P_{[f(a),f(b)]}$, untuk $\epsilon = c\delta^\alpha$ diperoleh

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{i=1}^{n-1}|f(x_{i+1}) - f(x_i)|^{s/\alpha}\,\theta\big(f(F), f(F \cap [x_i, x_{i+1}])\big)$$

$$\le c^{s/\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{i=1}^{n-1}|x_{i+1} - x_i|^s\theta(F, [x_i, x_{i+1}])$$

Dengan mengambil limit infimum dari kedua pertaksamaan di atas diperoleh

$$\gamma^{s/\alpha}\big(f(F),f(a),f(b)\big) \le c^{s/\alpha}\gamma^s(F,a,b) .$$

■

Teorema 2.2 *Diberikan himpunan* $F \subset R$ *perfek-*α *dan fungsi kontinu* $f: F \to R$ *adalah pemetaan yang memenuhuhi*

$$|f(y) - f(x)| \le c|y - x|^\alpha , x, y \in F$$

untuk suatu konstanta $c > 0$ *dan* $\alpha > 0$, *maka berlaku*

$$dim_\gamma\big(f(F)\big) \le \frac{1}{\alpha}dim_\gamma(F).$$

Bukti

Untuk $s > dim_\gamma(F)$ dengan Teorema 2.1 diperoleh

$$\gamma^{s/\alpha}\big(f(F), f(a), f(b)\big) \leq c^{s/\alpha}\gamma^s(F,a,b) = 0$$

berakibat

$$dim_\gamma\big(f(F)\big) \leq \tfrac{s}{\alpha} \text{ untuk } s > dim_\gamma(F).$$

Jadi terbukti

$$dim_\gamma\big(f(F)\big) \leq \tfrac{1}{\alpha} dim_\gamma(F).$$

■

Teorema 2.3 *Diberikan himpunan $F \subset R$ perfek-α, fungsi kontinu $f : R \to R$ dan $S_F^\alpha \in H^\alpha(F)$ dengan $S_F^\alpha(a) \neq S_F^\alpha(b), a, b \in F$. Jika $f \in D_F^\alpha$ berorder $\alpha \in (0,1)$, maka berlaku*

$$c_1|y-x|^\alpha \leq |f(y) - f(x)| \leq c_2|y-x|^\alpha, c_1, c_2 > 0, x, y \in F.$$

Bukti

Diketahui $f \in D_F^\alpha$ berorder $\alpha \in (0,1)$, akan dibuktikan $f \in H^\alpha(F)$ berpangkat $\alpha \in (0,1)$. Dari Teorema 1.9 diperoleh, jika diberikan himpunan $F \subset R$ perfek-α dan fungsi kontinu $f : F \subset R \to R$, $D_F^\alpha\big(f(x)\big)$ ada untuk setiap $x \in [a,b]$ dan $S_F^\alpha(a) \neq S_F^\alpha(b)$, maka dengan Teorema .....terdapat titik $c, d \in F$ yang memenuhi

$$\left|D_F^\alpha\big(f(c)\big)\right| \leq \left|\frac{f(y) - f(x)}{S_F^\alpha(x) - S_F^\alpha(x)}\right| \leq \left|D_F^\alpha\big(f(d)\big)\right|$$

atau dapat dituliskan

$$\left|D_F^\alpha\big(f(c)\big)\right| |S_F^\alpha(y) - S_F^\alpha(x)| \leq |f(y) - f(x)| \leq \left|D_F^\alpha\big(f(d)\big)\right| |S_F^\alpha(y) - S_F^\alpha(x)| \tag{2.1}$$

Oleh karena $S_F^\alpha \in H^\alpha(F)$ dengan pangkat $\alpha \in (0,1)$, maka dari (2.1) diperoleh

$$\left|D_F^{\alpha}\big(f(c)\big)\right||y-x|^{\alpha} \le |f(y)-f(x)| \le k\left|D_F^{\alpha}\big(f(d)\big)\right||y-x|^{\alpha}.$$

Dengan mengambil

$$\left|D_F^{\alpha}\big(f(c)\big)\right| = c_1 \text{ dan } k\left|D_F^{\alpha}\big(f(d)\big)\right| = c_2\,,$$

maka terbukti

$$c_1|y-x|^{\alpha} \le |f(y)-f(x)| \le c_2|y-x|^{\alpha}\,, c_1, c_2 > 0, x, y \in F \quad ■$$

Teorema 2.4 *Diberikan himpunan $F \subset R$ perfek-α yang berdimensi $dim_{\gamma}(F) = \alpha, \alpha \in (0,1)$, fungsi kontinu $f: R \to R$ dan $S_F^{\alpha} \in H^{\alpha}(F)$ dengan $S_F^{\alpha}(a) \neq S_F^{\alpha}(b), a, b \in F$. Jika $f \in D_F^{\alpha}$ berorder $\alpha \in (0,1)$, maka berlaku*

$$dim_{\gamma}\big(f(F)\big) = 1.$$

Bukti

Dengan Teorema 2.3 diperoleh

$$c_1|y-x|^{\alpha} \le |f(y)-f(x)| \le c_2|y-x|^{\alpha}\,, c_1, c_2 > 0, x, y \in F. \qquad (2.2)$$

Pembuktian teorema ini dapat dibagi menjadi dua bagian, yaitu untuk $dim_{\gamma}\big(f(F)\big) \le 1$ dan $dim_{\gamma}\big(f(F)\big) \ge 1$.

Dari (2.2), berlaku pertidaksamaan $|f(y)-f(x)| \le c_2|y-x|^{\alpha}$ sehingga dengan Teorema 2.1 diperoleh $dim_{\gamma}\big(f(F)\big) \le 1$.

(2.3)

Dari (2.2), juga berlaku pertidaksamaan $c_1|y-x|^{\alpha} \le |f(y)-f(x)|$ diperoleh $dim_{\gamma}\big(f(F)\big) \ge 1$.

(2.4)

Dari (2.3) dan (2.4) terbukti $dim_{\gamma}\big(f(F)\big) = 1$.

■

3. KESIMPULAN

Berdasarkan pada pembahasan di atas diperoleh kesimpulan, diberikan himpunan $F \subset R$ perfek-α yang berdimensi $dim_{\gamma}(F) = \alpha, \alpha \in (0,1)$ fungsi kontinu $f : R \to R$ dan $S_F^{\alpha} \in H^{\alpha}(F)$ dengan $S_F^{\alpha}(a) \neq S_F^{\alpha}(b), a, b \in F$. Jika $f \in D_F^{\alpha}$ berorder $\alpha \in (0,1)$, maka berlaku $dim_{\gamma}\big(f(F)\big) = 1$.

DAFTAR PUSTAKA

Parvate.A and Gangal.A.D (2003) " *Calculus on Fractal Subset of Real Line-I: Formulation* " http://arxiv.org/PS_cache/mathph/pdf/0310/0310047v1.pdf

Parvate.A and Gangal.A.D (2005)" Fractal differential Equations and Fractal-Time Dynamical System" *Pramana. Journal of Physics.Vol. 64, no, 3. March 2005. pp. 389-4009*. http://www.ias.ac.in/pramana/v64/p389/fulltext.pdf

Ross.B, Samko.S.G and Love.E.R (1994/5)" Functions That Have No First Order Derivative Migth Have Fractional Derivatives Of All Orders Less Than One" *Real Analysis Exchange Vol.20(2), pp. 140-147*

Spurrier.K.G (2004) " *Continuous Nowhere Differentiable Functions* " Senior Thesis, University of South. http://people.virginia.edu/~kgs5c/seniorthesis.pdf

Wibowo.S (2009)" *Hubungan antara Derivatif-* F^{α} *dari Fungsi* $f : F \to R$ *dengan Dimensi-*γ *dari Himpunan Fraktal* F " Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA, Fakultas MIPA UNY, 16 Mei 2009