JMP : Volume 4 Nomor 1, Juni 2012, hal. 23 - 29

REPRESENTASI FUNGSIONAL-2 DI l^p

Yosafat Eka Prasetya Pangalela

Institut Teknologi Bandung
matrix_yepp@yahoo.co.id

Hendra Gunawan

Institut Teknologi Bandung

ABSTRACT. *In this paper, the concept of 2-functionals will be introduced. The concept of bounded linear 2-functionals will be studied as an extension. We also discuss the 2-dual space of l^p, which is the space of bounded linear 2-functionals of l^p completed by some norm.*

Keywords: *2-functionals, 2-dual space, l^p spaces.*

ABSTRAK. *Di dalam makalah ini, konsep mengenai fungsional-2 akan diperkenalkan. Lebih jauh, konsep fungsional-2 linear terbatas akan dipelajari sebagai perluasan. Kita juga akan mendiskusikan ruang dual-2 dari l^p, yakni ruang semua fungsional-2 linear terbatas pada l^p yang dilengkapi dengan norm tertentu.*

Kata Kunci: *Fungsional-2, ruang dual-2, ruang l^p.*

1. PENDAHULUAN

Di ruang norm, kita telah mengenal konsep mengenai fungsional yang selanjutnya dikembangkan menjadi fungsional linear terbatas dan ruang dual. Berdasarkan hal tersebut, kita akan mendefinisikan fungsional-2 yang akan dikembangkan juga menjadi fungsional-2 linear terbatas dan ruang dual-2. Konsep mengenai fungsional-2 linear terbatas sendiri sebenarnya telah dibahas oleh White (1969), Gozali dkk (2010) dan Gürdal dkk (preprint), tetapi definisi fungsional-2 linear terbatas yang mereka gunakan mengharuskan domain ruang norm-2. Di sini, kita akan mengembangkan definisi fungsional-2 linear terbatas yang telah ada dan dilanjutkan dengan mendefinisikan ruang dual-2.

Pertama-tama, akan diberikan definisi mengenai norm-2 terlebih dahulu:.

Definisi 1.1. Misal X adalah ruang vektor real berdimensi $d \geq 2$. Fungsi bernilai real $\|\cdot,\cdot\|$ pada X^2 yang memenuhi keempat sifat berikut:

1) $\|x_1, x_2\| \geq 0$ untuk setiap $x_1, x_2 \in X$;
   $\|x_1, x_2\| = 0$ jika dan hanya jika x_1, x_2 bebas linear;
2) $\|x_1, x_2\| = \|x_2, x_1\|$ untuk setiap $x_1, x_2 \in X$;
3) $\|\alpha x_1, x_2\| = |\alpha|\|x_1, x_2\|$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x_1, x_2 \in X$;
4) $\|x + x', x_2\| \leq \|x, x_2\| + \|x', x_2\|$ untuk setiap $x, x', x_2 \in X$,

disebut *norm-2* pada X, dan pasangan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ disebut *ruang norm-2*.

Sebagai contoh, $X = \mathbb{R}^2$ dengan norm-2 berikut:

$$\|x_1, x_2\| := \left|\det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right|$$

dimana $x_i = (x_{i1}, x_{i2})$, i ∈ {1,2}, merupakan ruang norm-2.

Konsep norm-2 sendiri dikembangkan oleh Gähler (1964) sebagai perluasan dari konsep norm yang telah ada. Berbagai sifat mengenai norm-2 telah diteliti oleh White (1969) dan Gürdal dkk (preprint).

Selanjutnya, kita definisikan fungsional-2 yang kemudian akan diperluas menjadi fungsional-2 linear maupun fungsional-2 linear terbatas.

Definisi 1.2. Misal X adalah ruang vektor real. Fungsi f dari $X \times X$ ke $\mathbb{R}$ disebut fungsional-2. Selanjutnya, fungsional-2 f yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1) $f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2)$ untuk semua $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$;
2) $f(\alpha x, \beta y) = \alpha\beta f(x, y)$, untuk semua $x, y \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

disebut *fungsional-2 linear*.

Definisi 1.3. Misal f adalah fungsional-2 pada ruang norm $(X, \|\cdot\|)$ (ruang norm-2 $(X, \|\cdot,\cdot\|)$). Jika terdapat konstanta $\mathrm{K} > 0$ sedemikian sehingga

$$|f(x, y)| \leq \mathrm{K}\|x\|\|y\| \quad (|f(x, y)| \leq \mathrm{K}\|x, y\|)$$

untuk setiap $x, y \in X$, maka f dikatakan terbatas di $(X, \|\cdot\|)$ (terbatas di $(X, \|\cdot,\cdot\|)$).

Sebagai contoh, bila $X = \mathbb{R}^2$ maka fungsi f pada $X \times X$ yang didefinisikan dengan

$$f(x_1, x_2) = (x_{11} + x_{12})\,(x_{21} + x_{22})$$

dimana $x_i = (x_{i1}, x_{i2})$, $i \in \{1,2\}$, merupakan fungsional-2 linear pada $\mathbb{R}^2$. Lebih jauh, bila kita melengkapi $\mathbb{R}^2$ dengan norm $\|\cdot\|$ yang didefinisikan dengan

$$\|y\| := \sqrt{\mathrm{y_1}^2 + \mathrm{y_2}^2}$$

dimana $y = (y_1, y_2)$, maka kita dapat membuktikan bahwa

$$|f(x_1, x_2)| \leq 2\|x_1\|\|x_2\|$$

untuk setiap x_1, x_2 anggota $\mathbb{R}^2$ dengan menggunakan pertidaksamaan Cauchy-Schwarz. Akibatnya, f adalah fungsional-2 linear terbatas di $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$. Tetapi f bukan fungsional-2 linear terbatas di $(\mathbb{R}^2, \|\cdot,\cdot\|)$ dimana $\|\cdot,\cdot\|$ adalah norm-2 pada $\mathbb{R}^2$ yang diberikan sebagai contoh di atas.

Kita dapat melihat bahwa fungsional-2 linear terbatas di X yang didefinisikan oleh White (1969), Gozali dkk (2010) dan Gürdal dkk (preprint) sebenarnya adalah fungsional-2 linear terbatas di ruang norm-2 $(X, \|\cdot,\cdot\|)$. Di sini, kita tidak akan membahas lebih lanjut mengenai fungsional-2 linear terbatas di ruang norm-2 $(X, \|\cdot,\cdot\|)$, tetapi kita akan membahas mengenai fungsional-2 linear terbatas di ruang norm $(X, \|\cdot\|)$. Diilhami oleh ruang dual di ruang norm, himpunan dari fungsional-2 linear terbatas pada ruang norm $(X, \|\cdot\|)$ akan membentuk ruang vektor, yang selanjutnya disebut ruang dual-2 dari $(X, \|\cdot\|)$. Ruang ini akan menjadi ruang norm dengan norm $\|\cdot\|$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\|f\| := \sup_{\substack{x,y \in X \\ \|x\|,\|y\| \neq 0}} \frac{|f(x,y)|}{\|x\|\|y\|}.$$

Kita telah mengetahui bahwa ruang dual dari l^1 adalah l^∞ dan ruang dual l^p adalah l^q, dimana $1 < p < \infty$ dan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Kreszig (1978)). Berdasarkan itu, kita akan membahas mengenai ruang dual-2 dari $\left(l^p, \|\cdot\|_{\mathrm{p}}\right)$.

2. RUANG DUAL-2 DARI $\left(l^p, \|\cdot\|_{\mathrm{p}}\right)$.

Untuk mengidentifikasi ruang dual-2 tersebut, kami akan memberikan definisi sebuah ruang barisan ganda terlebih dahulu.

Definisi 2.1. Misal $1 \leq p < \infty$ dan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Barisan ganda real $x = \left(x_{kj}\right)$ dikatakan berada di $Y^p_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ jika

$$\sup_{\|a\|_q=1} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{kj}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \infty$$

dimana $\|\cdot\|_{\mathrm{q}}$ adalah norm di l^q berdasarkan Kreszig (1978). Selanjutnya,

$$\|x\|_{Y^p_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}} := \sup_{\|a\|_q=1} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{kj}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Untuk $p = \infty$, barisan ganda real $x = \left(x_{kj}\right)$ dikatakan berada di $Y^\infty_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ jika

$$\sup_{\|a\|_1=1} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{kj}\right| < \infty.$$

Selanjutnya,

$$\|x\|_{Y^\infty_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}} := \sup_{\|a\|_1=1} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{kj}\right|.$$

Sekarang kita akan masuk ke inti pembahasan, yaitu hubungan antara ruang dual-2 dari $\left(l^p, \|\cdot\|_{\mathrm{p}}\right)$ dengan ruang $Y^p_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.

Teorema 2.2. *Bila* $1 < p < \infty$ *dan* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *maka ruang dual-2 dari* $\left(l^p, \|\cdot\|_p\right)$ *adalah* $Y^q_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.

Bukti. Ambil $\theta = \left(\theta_{kj}\right) \in Y^q_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Ambil $a, b \in l^p$ dimana $\|a\|_p = 1$, selanjutnya tulis $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ dan $b = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i$, kita definisikan

$$f(a,b) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_k b_j \theta_{kj}.$$

Jelas bahwa f adalah fungsional-2 linear pada $(l^p, \|\cdot\|_{\mathrm{p}})$ jadi cukup ditunjukkan keterbatasan dari f. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
|f(a,b)| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_k b_j \theta_{kj}\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{\infty}\left[b_j \sum_{k=1}^{\infty} a_k \theta_{kj}\right]\right| \\
&\leq \left[\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\theta_{kj}\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \|b\|_p\left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\theta_{kj}\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\frac{|f(a,b)|}{\|a\|_p\|b\|_p} \leq \left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\theta_{kj}\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq \sup_{\|a\|_p=1}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\theta_{kj}\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Jadi f adalah fungsional-2 linear terbatas pada $(l^p, \|\cdot\|_{\mathrm{p}})$ dengan

$$\|f\| \leq \sup_{\|a\|_p=1}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\theta_{kj}\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{1}$$

Misal g adalah fungsional-2 linear terbatas pada $(l^p, \|\cdot\|_{\mathrm{p}})$, akan dibuktikan $\big(g(e_k, e_j)\big) \in Y^q_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Definisikan fungsional g_a pada $(l^p, \|\cdot\|_{\mathrm{p}})$ dimana $\|a\|_p = 1$ dengan

$$g_a(b) := g(a,b) \text{ untuk setiap } b \in l^p.$$

Jelas bahwa g_a adalah fungsional linear pada $(l^p, \|\cdot\|_{\mathrm{p}})$, dan keterbatasan dari g_a didapat berdasarkan

$$\frac{|g_a(b)|}{\|b\|_p} = \frac{|g(a,b)|}{\|a\|_p\|b\|_p} \leq \|g\|.$$

Karena g_a adalah fungsional linear terbatas $(l^p, \|\cdot\|_{\mathrm{p}})$ maka

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} \left|g(a,e_j)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} = \|g_a\| \leq \|g\|.$$

Jadi

$$\sup_{\|a\|_p=1} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k g(e_k,e_j)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq \|g\|. \tag{2}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa norm pada f adalah norm pada ruang $Y^q_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Perhatikan bahwa f juga memenuhi persamaan (2), jadi kita memiliki

$$\sup_{\|a\|_p=1} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f(e_k,e_j)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|.$$

Dari ini dan persamaan (1), maka

$$\|f\| = \sup_{\|a\|_p=1} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f(e_k,e_j)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Jadi pemetaan linear bijektif dari ruang dual-2 dari $(l^p, \|\cdot\|_{\mathrm{p}})$ ke $Y^q_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ yang didefinisikan dengan $f \mapsto \left(f(e_k,e_j)\right)$ adalah sebuah isomorfisma. □

3. KESIMPULAN

Kita telah melihat bahwa bila $1 < p < \infty$ maka ruang dual-2 dari $(l^p, \|\cdot\|_{\mathrm{p}})$ adalah $Y^q_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Kita juga dapat memeriksa ruang dual-2 dari $(l^1, \|\cdot$

$\|_1)$ adalah $Y^{\infty}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Jika kita berbicara ruang dual dari l^p, maka kita memiliki ruang dual dari l^1 adalah l^{∞} dan ruang dual l^p adalah l^q dimana $1 < p < \infty$ dan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dari sini kita dapat melihat semacam keterkaitan antara ruang dual dari l^p dengan ruang dual-2 dari $(l^p, \| \cdot \|_{\mathrm{p}})$. Lebih jauh, apabila kita memandang anggota dari $Y^{q}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ sebagai sebuah matriks maka kita dapat melihat bahwa barisan yang dibentuk oleh elemen-elemen $Y^{q}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ dengan cara menetapkan sebuah baris dan menggerakkan kolomnya adalah anggota dari l^q.

UCAPAN TERIMAKASIH

Terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan kontribusi pada penelitian dan penulisan naskah artikel.

DAFTAR PUSTAKA

Gähler, S. (1964) Lineare 2-normierte Roume, *Mathematische Nachrichten* ***28*** (1964), 1-43.

Gozali, S. M; Gunawan, H; dan Neswan, O. (2010) On n-norms and bounded *n*-linear functionals in a Hilbert space, *Annals of Functional Analysis* **1**, 72-79.

Gürdal, M; Sahiner, A; dan Açik. n-Banach Spaces and Bounded Linear n-Functional (preprint).

Kresyzig, E. (1978) *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, Inc.

White, A. G. (1969) 2-Banach Spaces, *Mathematische Nachrichten* ***42*** (1969), 43-60.