SPEKTRUM PADA GRAF REGULER KUAT

Rizki Mulyani, Triyani dan Niken Larasati

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknik
Universitas Jenderal Soedirman

Email : rizky90@gmail.com

ABSTRACT. *This article studied spectrum of strongly regular graph. This spectrum can be determined by the number of walk with lenght l on connected simple graph, equation of square adjacency matrix and eigen value of strongly regular graph.*

Key words: *graph spectrum, strongly regular graph, eigen value*

ABSTRAK. *Artikel ini mengkaji spektrum pada graf reguler kuat. Spektrum ini dapat ditentukan dengan mengetahui banyaknya jalan dengan panjang l pada graf sederhana terhubung, persamaan dari kuadrat matriks ketetanggaan graf reguler kuat dan nilai eigen pada graf reguler kuat.*

Kata kunci*: spektrum graf, graf reguler kuat, nilai eigen*

1. PENDAHULUAN

Teori spektral graf mulai dipelajari pada tahun 1950 an. Teori spektral graf ini merupakan salah satu kajian dalam teori graf yang mempelajari sifat-sifat graf dalam hubungannya dengan polinom karakteristik, nilai eigen dan vektor eigen dari matriks yang merepresentasikan graf. Salah satu matriks representasi dari graf adalah matriks ketetanggaan. Matriks ketetanggaan dari sebuah graf sederhana dengan n titik adalah matriks berukuran $n \times n$ yang elemen baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 0 atau 1. Elemen baris ke-i kolom ke-j pada matriks ketetangaan akan bernilai 0 jika titik v_i tidak bertetangga dengan titik v_j, dan bernilai 1 jika titik v_i bertetangga dengan titik v_j. Matriks ketetanggaan dari sebuah graf bersifat simetri, sehingga nilai eigen dari matriks ini semuanya bernilai riil (Kolman, 2007).

Salah satu kajian dalam teori spekral graf adalah menentukan spektrum pada graf. Spektrum pada graf merupakan pasangan terurut dari nilai-nilai eigen matriks ketetanggaan beserta multiplisitasnya. Jika λ adalah nilai eigen dari matriks A, maka multiplisitas aljabar didefinisikan sebagai multiplisitas dari λ sebagai akar polinom karakteristik dari A. Sementara itu multiplisitas geometri didefinisikan sebagai dimensi dari ruang eigen E_λ. Pada matriks simetri, multiplisitas geometri sama dengan multiplisitas aljabarnya (Kolman, 2007).

Graf reguler kuat dengan parameter (n,k,a,b) didefinisikan sebagai graf reguler berderajat k yang mempunyai n titik dengan jumlah ketetanggaan bersama untuk setiap pasang titik yang bertetangga adalah a dan jumlah ketetanggaan bersama untuk setiap pasang titik yang tidak bertetangga adalah b (Biggs,1993). Spektrum pada graf reguler kuat dengan parameter (n,k,a,b) dapat diturunkan dari lemma dan teorema tentang banyaknya jalan berbeda dari titik u ke titik v pada graf terhubung, persamaan dari kuadrat matriks ketetanggaan graf reguler kuat, dan nilai eigen dari matriks ketetanggaan graf reguler kuat.

Pada artikel ini, lemma dan teorema tersebut diberikan oleh Biggs (1993), Chaudhary *et. al* (1986) dan Bapat (2010). Namun bukti dari lemma dan teorema tersebut belum tertulis secara rinci. Oleh karena itu, penulis memberikan bukti-buktinya lebih rinci. Selanjutnya lemma dan teorema tersebut digunakan oleh penulis untuk memperoleh bentuk spektrum pada graf reguler kuat.

2. SPEKTRUM GRAF REGULER KUAT

Misalkan $A(G)$ adalah matriks ketetanggaan dari graf G dengan nilai eigen berbeda $\lambda_0 > \lambda_1 > \cdots > \lambda_{s-1}$. Misal m_i adalah multiplisitas dari nilai eigen ke–i, $i \in \{0,1,2,...,s-1\}$. Spektrum graf G yang dinotasikan dengan $spec(G)$ didefinisikan sebagai

$$spec(G) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_{s-1} \\ m_0 & m_1 & \ldots & m_{s-1} \end{pmatrix}$$

(Biggs, 1993).

Ada beberapa lemma dan teorema yang dapat digunakan sebagai acuan untuk menentukan spektrum pada graf *reguler* kuat *(n, k, a, b).* Berikut ini adalah lemma yang ditulis oleh Biggs (1993).

Lemma 2.1 (Biggs, 1993).

Jika A adalah matriks ketetanggaan dari graf G, maka elemen baris ke- i *kolom ke-* j *pada matriks* A^{ℓ} *menyatakan jumlah jalan yang berbeda dari* v_i *ke* v_j *dengan panjang* ℓ *pada graf* G.

Bukti. Lemma ini akan dibuktikan dengan induksi matematika.

i) Untuk $\ell = 1$, diperoleh $A^1 = A.$ Elemen-elemen ke (i, j) pada matriks ketetanggaan graf *G* adalah

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jika } (v_i v_j) \in E(G) \\ 0, \text{ jika } (v_i v_j) \notin E(G). \end{cases}$$

Jika v_i bertetangga dengan v_j maka terdapat sisi yang menghubungkan langsung dari v_i ke v_j. Hal ini berarti terdapat jalan dengan panjang satu dari v_i ke v_j. Sebaliknya jika v_i tidak bertetangga dengan v_j, maka tidak terdapat sisi yang menghubungkan langsung dari titik v_i ke v_j. Hal ini berarti tidak terdapat jalan dengan panjang satu dari v_i ke v_j. Akibatnya elemen baris ke-*i* kolom ke-*j* pada matriks ketetanggaan menyatakan jumlah jalan dengan panjang 1 dari v_i ke v_j.

ii) Asumsikan benar untuk $\ell = k$, artinya $(A^k)_{ij}$ menyatakan jumlah jalan yang berbeda dari v_i ke v_j dengan panjang k.

iii) Akan ditunjukkan $(A^{k+1})_{ij}$ menyatakan jumlah jalan yang berbeda dari v_i ke v_j dengan panjang $k+1$.

Jumlah jalan yang berbeda dari v_i ke v_j dengan panjang $k+1$ sama dengan jumlah jalan yang berbeda dari v_i ke v_h dengan panjang k dengan v_h adalah titik yang bertetangga dengan v_j. Hal ini berarti jumlah jalan dengan panjang $k+1$ dari v_i ke v_j adalah $\sum_{(v_h v_j)\in E(G)} (A^k)_{ij}$, karena elemen $(A)_{hj}$ bernilai satu jika v_h bertetangga dengan v_j dan bernilai 0 jika v_h tidak bertetangga dengan v_j . Akibatnya diperoleh

$$\sum_{h=1}^{n}\left(A^k\right)_{ih}(A)_{hj} = \left(A^k\right)_{i1}(A)_{1j} + \left(A^k\right)_{i2}(A)_{2j} + \ldots + \left(A^k\right)_{in}(A)_{nj}$$
$$= \left(A^k A\right)_{ij} = \left(A^{k+1}\right)_{ij}.$$

Hasil ini menyimpulkan bahwa elemen baris ke-*i* kolom ke-*j* pada matriks A^{k+1}. menyatakan jumlah jalan dari v_i ke v_j dengan panjang $k+1$. ■

Teorema 2.2 (Chaudhary *et.al.*, 1986).

Jika G adalah graf reguler kuat dengan parameter (n,k,a,b), maka kuadrat matriks ketetanggaan dari graf G adalah $A^2 = (a-b)A + (k-b)I + bJ$.

Bukti : Untuk membuktikan teorema ini akan dicari elemen baris ke-*i* kolom ke-*j* pada kuadrat matriks ketetanggaan $(A^2)_{ij}$. Untuk *i* = *j*, elemen diagonal dari kuadarat matriks ketetanggaan suatu graf merepresentasikan derajat titik v_i. Karena G adalah graf reguler kuat berderajat *k*, maka $(A^2)_{ii} = k$. Dari lemma 1 dan definisi graf reguler kuat, elemen baris ke-i kolom ke-j untuk $i \neq j$ dan $(v_i v_j) \in E(G)$ pada kuadrat matriks ketetanggaan graf reguler kuat merepresentasikan juga banyaknya ketetanggaan bersama untuk setiap dua titik yang bertetangga yaitu *a*. Sedangkan untuk elemen baris ke-i kolom ke-j dengan $i \neq j$ dan $(v_i v_j) \notin E(G)$ pada kuadrat matriks ketetanggaan graf reguler kuat merepresentasikan juga banyaknya ketetanggaan bersama untuk setiap dua titik yang tidak bertetangga yaitu b. Oleh karena itu, $(A^2)_{ij}$ dapat ditulis sebagai berikut

$$\left(A^2\right)_{ij} = \begin{cases} k, \text{untuk } i = j \\ a, \text{untuk } i \neq j \text{ } dengan \quad (v_i v_j) \in E(G) \\ b, \text{untuk } i \neq j \text{ } dengan \quad (v_i v_j) \notin E(G). \end{cases} \qquad (1)$$

Persamaan (1) dapat juga ditulis sebagai berikut

$$A^2 = kI + aA + bA^c. \qquad (2)$$

Karena G adalah graf reguler maka $A + A^c = J - I$ (Biggs, 1993), apabila $A^c = J - I - A$ disubstitusikan ke persamaan (2) diperoleh

$$A^2 = kI + aA + c(J - I - A)$$
$$A^2 = (a-b)A + (k-b)I + bJ.$$

■

Teorema 2.3 (Bapat, 2010).

Jika G adalah graf reguler kuat dengan parameter (n,k,a,b) dan $t = (a-b)^2 + 4(k-b)$, *maka setiap nilai eigen dari A adalah k atau* $\frac{1}{2}\left(a - b \pm \sqrt{t}\right)$.

Bukti. Nilai eigen $\lambda_o = k$ diperoleh dari proposisi graf reguler G yang menyatakan k adalah nilai eigen dari matriks ketetanggaan G (Biggs, 1993*)*. Selanjutnya akan dibuktikan $\lambda_* = \frac{1}{2}\left(a - b \pm \sqrt{t}\right)$ juga nilai eigen dari matriks ketetanggaan graf reguler kuat dengan parameter *(n, k, a, b).* Misal diambil nilai eigen $\mu \neq k$, dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen μ adalah **y**. Dari teorema 2 diperoleh persamaan

$$A^2 = (a-b)A + (k-b)I + bJ$$
$$A^2 + (b-a)A + (b-k)I = bJ. \qquad (3)$$

Dengan mengalikan ruas kiri dan ruas kanan pada persamaan (3) dengan **y** diperoleh

$$A^2\mathbf{y} + (b-a)A\mathbf{y} + (b-k)I\mathbf{y} = bJ\mathbf{y}. \tag{4}$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah **u** = [1 1….1]^T (Kolman, 2007). Karena **y** adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan μ, akibatnya **u** ortogonal dengan **y**. Sehingga

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = 1y_1 + ... + 1y_n = 0.$$

Persamaan (4) dapat ditulis sebagai

$$bJ\mathbf{y} = b\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right]$$

$$= b\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Karena $A\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$, persamaan (4) menjadi

$$\left(\mu^2 + (b-a)\mu + (b-k)\right)\mathbf{y} = 0\mathbf{y}. \tag{5}$$

Persamaan (5) mengakibatkan

$$\mu^2 + (b-a)\mu + (b-k) = 0. \tag{6}$$

Persamaan (6) merupakan persamaan kuadrat dengan variabel μ, persamaan kuadrat ini dapat difaktorkan menggunakan rumus sebagai berikut :

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{(a-b) \pm \sqrt{(b-a)^2 + 4(k-b)}}{2}.$$

Karena $t = (b-a)^2 + 4(k-b)$ sehingga $\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}((a-b) \pm \sqrt{t})$. ■

Selanjutnya teorema 3 digunakan untuk memperoleh bentuk spektrum pada graf reguler kuat dengan parameter *(n, k, a, b)*. Hasil sebelumnya diperoleh tiga persamaan untuk nilai eigen dari matriks ketetanggaan graf reguler kuat yaitu

$$\lambda_0 = k \tag{7}$$

$$\lambda_\alpha = \frac{(a-b)+\sqrt{t}}{2} \tag{8}$$

$$\lambda_\beta = \frac{(a-b)-\sqrt{t}}{2} \tag{9}$$

dengan $t = (b-a)^2 + 4(k-b)$.

Misalkan m_0 adalah multiplisitas dari nilai eigen k, m_1 adalah multiplisitas dari nilai eigen λ_α dan m_2 adalah multiplisitas dari nilai eigen λ_β, maka multiplisitas dari matriks ketetanggaan graf reguler kuat adalah $m_0 + m_1 + m_2 = n$. Karena multiplisitas $m_0 = k$ adalah 1 (Biggs, 1993), maka $m_1 + m_2 = n-1$. Salah satu sifat matriks ketetanggaan adalah $\left(A\right)_{ii} = 0$, akibatnya $tr(A) = 0$. Menurut Biggs (1993), $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A)$ sehingga diperoleh

$$\sum_{i}^{n} \lambda_i = k + m_1\lambda_\alpha + m_2\lambda_\beta = 0. \tag{10}$$

Substitusi persamaan (8) dan (9) ke persamaan (10), diperoleh

$$k + m_1\left(\frac{(a-b)+\sqrt{t}}{2}\right) + m_2\left(\frac{(a-b)-\sqrt{t}}{2}\right) = 0. \tag{11}$$

Kalikan persamaan (11) dengan 2, diperoleh

$$2k + m_1\left((a-b)+\sqrt{t}\right) + m_2\left((a-b)-\sqrt{t}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \; m_1 - m_2 = \frac{-(m_1+m_2)(a-b)-2k}{\sqrt{t}}. \tag{12}$$

Tambahkan ruas kiri dari persamaan (12) dengan $m_1 - m_1$ diperoleh

$$m_1 - m_2 + m_1 - m_1 = \frac{(m_1+m_2)(b-a)-2k}{\sqrt{t}}$$

$$\Leftrightarrow 2m_1 - (m_1+m_2) = \frac{(m_1+m_2)(b-a)-2k}{\sqrt{t}}$$

$$\Leftrightarrow m_1 = \frac{1}{2}\left[(m_1+m_2) + \frac{(m_1+m_2)(b-a)-2k}{\sqrt{t}}\right]. \tag{13}$$

Sebelumnya diketahui bahwa $m_1 + m_2 = n - 1$. Substitusi $m_1 + m_2 = n - 1$ ke persamaan (13) diperoleh

$$m_1 = \frac{1}{2}\left[(n-1) + \frac{(n-1)(b-a) - 2k}{\sqrt{t}}\right], \tag{14}$$

sehingga

$$m_2 = n - 1 - m_1$$

$$m_2 = \frac{1}{2}\left[(n-1) - \left(\frac{(n-1)(b-a) - 2k}{\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{15}$$

Substitusi $t = (b-a)^2 + 4(k-b)$ ke persamaan (14) dan (15), diperoleh

$$m_1 = \frac{1}{2}\left[(n-1) + \frac{(n-1)(b-a) - 2k}{\sqrt{(b-a)^2 + 4(k-b)}}\right]$$

$$m_2 = \frac{1}{2}\left[(n-1) - \frac{(n-1)(b-a) - 2k}{\sqrt{(b-a)^2 + 4(k-b)}}\right].$$

Oleh karena itu, diperoleh spektrum graf reguler kuat

$$spec(G) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_\alpha & \lambda_\beta \\ m_0 & m_1 & m_2 \end{pmatrix},$$

dengan

$$\lambda_0 = k$$

$$\lambda_\alpha = \frac{(a-b) + \sqrt{(b-a)^2 + 4(k-b)}}{2}$$

$$\lambda_\beta = \frac{(a-b) - \sqrt{(b-a)^2 + 4(k-b)}}{2}$$

$$m_0 = 1$$

$$m_1 = \frac{1}{2}\left[(n-1) + \frac{(n-1)(b-a) - 2k}{\sqrt{(b-a)^2 + 4(k-b)}}\right]$$

$$m_2 = \frac{1}{2}\left[(n-1) - \frac{(n-1)(b-a) - 2k}{\sqrt{(b-a)^2 + 4(k-b)}}\right].$$

3. KESIMPULAN DAN SARAN

Bentuk spektrum pada graf reguler kuat dengan parameter (n,k,a,b) adalah

$$spec(G) = \begin{pmatrix} k & \frac{(a-b)+\sqrt{(b-a)^2+4(k-b)}}{2} & \frac{(a-b)-\sqrt{(b-a)^2+4(k-b)}}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}(n-1)+\frac{(n-1)(b-a)-2k}{\sqrt{(b-a)^2+4(k-b)}} & \frac{1}{2}(n-1)-\frac{(n-1)(b-a)-2k}{\sqrt{(b-a)^2+4(k-b)}} \end{pmatrix},$$

dengan *n* menyatakan banyak titik di *G*, *k* menyatakan derajat setiap titik di *G*, *a* menyatakan banyaknya ketetanggaan bersama untuk setiap dua titik yang bertetangga dan *b* menyatakan banyaknya ketetanggaan bersama untuk setiap dua titik yang tidak bertetangga di *G*.

Pada artikel ini hanya dibahas mengenai bentuk spektrum pada graf *reguler* kuat. Kajian lanjutan dari spektrum pada graf *reguler* kuat adalah menentukan banyaknya *spanning tree* atau yang disebut *tree number* dari graf regular kuat.

DAFTAR PUSTAKA

Bapat, R B. (2010). *Graphs Matrices*. Hindustan Book , India.

Biggs N. (1993). *Algebraic Graph Theory*. Second Edition, Cambridge Mathematical Library.

Chaudhary, N.S, Sada, N.L., and Phatak, B.D. (1986). *A Note on The Property of an Adjoint of the Adjacency Matrix of Strongly Regular Graph*, Indian Journal. Pure Appl.Math. pp. 871-874.

Kolman B.(2007). *Elementary Linear Algebra and Its Applications*. Ninth Edition. Published by Pearson.