KONTROL OPTIMAL MODEL PENYEBARAN VIRUS KOMPUTER DENGAN PENGARUH KOMPUTER EKSTERNAL YANG TERINFEKSI DAN *REMOVABLE STORAGE MEDIA*

Dewi Erla Mahmudah

STMIK Widya Utama
mdewierla@gmail.com

Muhammad Zidny Naf'an

ST3 Telkom Purwokerto
zidny@st3telkom.ac.id

Muh Sofi'i

STMIK Widya Utama
sof.swu@gmail.com

Wika Purbasari

STMIK Widya Utama
wika@wikapurbasari.net

ABSTRACT. *In this paper, we discuss an optimal control on the spread of computer viruses under the effects of infected external computers and removable storage media. Prevention Strategies do with ascertaining control prevention to minimize the number of infective computers (Latent and Breakingout) and installing effective antivirus programs in each sub-population. The aim are to derive optimal prevention strategies and minimize the cost associated with the control. The characterization of optimal control is perform analitically by applying Pontryagin Minimum Principle. The obtained optimality system of Hamilton fuction is satistfy the optimality condition.*

Keywords*: computer virus, removable storage media, pontryagin minimum principle, Hamilton function.*

ABSTRAK. Pada penelitian ini dibahas kontrol optimal model penyebaran virus komputer dengan pengaruh komputer eksternal yang terinfeksi dan *removable storage media*. Strategi pencegahan dilakukan dengan menentukan kontrol pencegahan untuk meminimumkan jumlah komputer yang terinfeksi (Laten dan *Breakingout*) dan pemasangan program antivirus pada setiap sub-populasi. Tujuan kontrol optimal adalah untuk mendapatkan strategi pencegahan optimal dan meminimumkan biaya yang digunakan untuk menerapkan kontrol. Kontrol optimal diperoleh dengan menerapkan Prinsip Minimum Pontryagin. Solusi optimal pada fungsi Hamilton yang dibentuk memenuhi kondisi optimal.

Kata Kunci: virus komputer, r*emovable storage media*, prinsip minimum pontryagin, fungsi Hamilton.

1. PENDAHULUAN

Virus komputer merupakan ancaman besar pada jaringan komputer. Sama halnya seperti virus biologi, virus komputer bekerja dengan cara menggandakan dirinya sendiri dan menyebar dengan cara menyisipkan dirinya ke sel makhluk hidup. Penggunaan sistem jaringan komputer, menyebabkan virus komputer dapat menyebar dari komputer satu ke komputer lainnya yang saling terhubung. Komputer yang sudah terjangkit virus tidak dapat bekerja secara optimum karena semakin lama virus tersebut dapat menyebabkan kerusakan pada *software* maupun *hardware* komputer. Oleh karena itu, perlu adanya pengontrolan penyebaran virus komputer pada jaringan komputer (Achadiyah, 2015).

Chen dkk (2015) membuat strategi kontrol pencegahan berupa pemasangan antivirus pada komputer dengan kategori *breakout* untuk meminimalkan jumlah komputer *breakout* dan biaya yang digunakan dalam menerapkan kontrol. Namun, pada hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa komputer dengan kategori *breakout* masih eksis dan jumlah komputer laten bertambah.

Darajat dkk (2016) membuat strategi yang berbeda, yaitu meminimalkan jumlah komputer laten dan *breakout* serta biaya pemasangan antivirus pada setiap sub populasi. Dengan menerapkan strategi ini, pemasangan antivirus pada komputer dengan kategori *susceptible* (S) sangat berpengaruh dalam menekan penyebaran virus komputer.

Berbeda dengan penelitian di atas yang meneliti tentang model SLBS, Yang dkk (2012) mengenalkan model penyebaran virus komputer dengan empat kompartemen, yaitu model SLBRS. Kemudian, Yang dkk (2014) mengembangkan model dengan mempertimbangkan efek komputer terinfeksi yang terhubung dengan internet. Namun, model ini tidak mengembangkan dampak *removable storage media* pada perpindahan virus.

Zhang (2016) mengenalkan model baru yaitu model penyebaran virus komputer dengan pengaruh komputer eksternal yang terinfeksi dan *removable storage media* yang dikategorikan menjadi empat sub populasi: komputer *susceptible* $(S \equiv S(t))$, komputer *latent* $(L \equiv L(t))$, komputer *breakout* $(B \equiv B(t))$, dan komputer *removed* $(R \equiv R(t))$. Diagram kompartemen dari model ini adalah sebagai berikut:

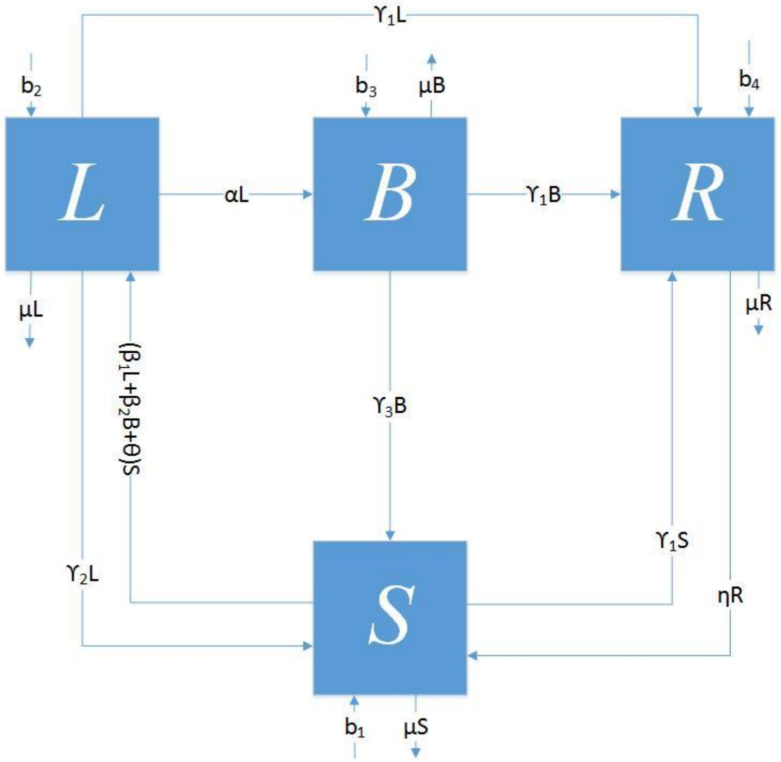
$$\frac{dS}{dt} = b_1 + \gamma_2 L + \gamma_3 B + \eta R - \mu S - \gamma_1 S - \beta_1 LS - \beta_2 BS - \theta S \tag{1.1}$$

$$\frac{dL}{dt} = b_2 + \beta_1 LS + \beta_2 BS + \theta S - \gamma_1 L - \gamma_2 L - \mu L - \alpha L \tag{1.2}$$

$$\frac{dB}{dt} = b_3 + \alpha L - \mu B - \gamma_1 B - \gamma_3 B \tag{1.3}$$

$$\frac{dR}{dt} = b_4 + \gamma_1 S + \gamma_1 L + \gamma_1 B - \eta R - \mu R \tag{1.4}$$

dimana tingkat kematian (komputer tidak dapat digunakan kembali) dari setiap kompartemen adalah konstan positif μ.Tingkat pertumbuhan dari keempat kompartemen masing-masing adalah konstan positif b_1, b_2, b_3 dan b_4. Setiap komputer pada kompartemen *susceptible* (S) terinfeksi dari komputer *latent* (L) atau *breakout* (B) dengan probabilitas berturut-turut adalah $\beta_1 L$ atau $\beta_2 B$, dengan β_1 dan β_2 adalah konstan positif. Setiap komputer pada kompartemen *susceptible* (S) terinfeksi dari *removable storage media* yang terinfeksi, dengan probabilitas θ. Setiap komputer pada kompartemen *latent* (L) menjadi *breakout* (B) dengan probabilitas α. Setiap komputer pada kompartemen *removed* (R) kehilangan imunitas dengan probabilitas η. Karena pemasangan dan pemutakhiran software antivirus tepat waktu, setiap komputer yang tersambung internet menjadi pulih dengan probabilitas γ_1. Dan yang terakhir, karena pemasangan ulang sistem operasi, setiap komputer *latent* (L) atau *breakout* (B) menjadi *susceptible* (S) dengan probabilitas γ_2 atau γ_3. Model penyebaran virus komputer dengan pengaruh komputer eksternal yang terinfeksi dan *removable storage media* dapat dilihat pada Gambar.



Gambar. Diagram Kompartemen Model Penyebaran Virus Komputer Dengan Pengaruh Komputer Eksternal yang Terinfeksi dan *Removable Storage Media*

2. METODE PENELITIAN

Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah:

1. Mengkonstruksi model penyebaran virus komputer dengan pengaruh komputer eksternal yang terinfeksi dan *removable storage media* (Zhang, 2016).
2. Mengkonstruksi model penyebaran virus komputer dengan pengaruh komputer eksternal yang terinfeksi dan *removable storage media* dengan kontrol.
3. Menentukan kontrol optimal.

   Penyelesaian kontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin sebagai berikut:

   a. Membentuk fungsi Hamilton $H(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\lambda}(t)) = f\big(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\big) + \boldsymbol{\lambda}(t)\mathbf{g}\big(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\big)$.

b. Menyelesaikan $\frac{\partial H(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\lambda}(t))}{\partial \mathbf{u}} = 0$ untuk mendapatkan $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*\big(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)\big)$.

c. Mengamati $H^*\big(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)\big) = H\Big(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*\big(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)\big), \boldsymbol{\lambda}(t)\Big) = \min_{\mathbf{u}\in U} H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t))$.

d. Menyelesaikan persamaan *state* $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial H(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\lambda}(t))}{\partial \lambda}$ dan persamaan *costate* $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial H(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\lambda}(t))}{\partial \mathbf{x}}$ dengan kondisi transversal $\lambda(t) = 0$.

e. Mensubstitusikan hasil dari langkah d. ke $\mathbf{u}^*$ untuk menentukan kontrol optimal.

(Gopal, 1985).

3. PERMASALAHAN KONTROL OPTIMAL

3.1 Konstruksi Model dengan Kontrol

Pada penelitian ini diterapkan kontrol $u_1 \equiv u_1(t), u_2 \equiv u_2(t), u_3 \equiv u_3(t)$ dan $u_4 \equiv u_4(t)$. Kontrol u_1 adalah kontrol pencegahan untuk memberi perlindungan pada komputer *susceptible* (S) ketika berinteraksi dengan komputer yang terinfeksi atau *removable storage media*. Kontrol u_2 dan u_3 adalah kontrol untuk memperbaiki komputer yang terinfeksi (*latent* (L) dan *breakout* (B)). Karena keterbatasan kemampuan antivirus, diasumsikan bahwa dengan menerapkan kontrol u_3 pada komputer *breakout* (B) pada waktu t mengakibatkan $\xi u_3 B$ pada komputer *breakout* (B) menjadi *susceptible* (S), dan $(1-\xi)u_3 B$ pada komputer *breakout* (B) menjadi *latent* (L), dengan $\xi \in [0,1]$.

Kontrol u_4 adalah kontrol pencegahan untuk memberi perlindungan pada komputer *recovered* (R). Model penyebaran virus komputer dengan pengaruh komputer eksternal yang terinfeksi dan *removable storage media* dengan variabel kontrol, yang merupakan pengembangan dari persamaan (1.1-1.4) adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = b_1 + \gamma_2 L + \gamma_3 B + \eta R - \mu S - \gamma_1 S - (1 - u_1)(\beta_1 LS + \beta_2 BS + \theta S) + u_2 L + \xi u_3 B + u_4 R \tag{2.1}$$

$$\frac{dL}{dt} = b_2 + (1 - u_1)(\beta_1 LS + \beta_2 BS + \theta S) - \gamma_1 L - \gamma_2 L - \mu L - \alpha L - u_2 L + (1 - \xi) u_3 B \tag{2.2}$$

$$\frac{dB}{dt} = b_3 + \alpha L - \mu B - \gamma_1 B - \gamma_3 B - u_3 B \tag{2.3}$$

$$\frac{dR}{dt} = b_4 + \gamma_1 S + \gamma_1 L + \gamma_1 B - \eta R - \mu R - u_4 R \tag{2.4}$$

dimana $b_1, b_2, b_3, b_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \eta, \mu, \xi, \beta_1, \beta_2, \theta, \alpha$, adalah konstan positif.

3.2 Penyelesaian Kontrol Optimal

Penyelesaian kontrol optimal disini bertujuan untuk meminimumkan subpopulasi komputer *latent* (L) dan *breakout* (B) dan biaya yang digunakan untuk menerapkan kontrol $u_1 \equiv u_1(t), u_2 \equiv u_2(t), u_3 \equiv u_3(t)$ dan $u_4 \equiv u_4(t)$ yaitu dengan meminimumkan fungsi objektif berikut:

$$J(u_1, u_2, u_3, u_4) = \int_0^T (mL + nB + wu_1{}^2 + xu_2{}^2 + yu_3{}^2 + zu_4{}^2) dt$$

dengan kendala sistem persamaan $(2.1 - 2.4)$, dengan m, n, w, x, y dan z adalah bobot yang dikenakan pada sistem dengan $t \in [0, T]$.

Kemudian akan ditentukan kontrol optimal $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ dan $\bar{u}_4$ sehingga berlaku

$$J(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\ ) = \min\{J(u_1, u_2, u_3, u_4) | u_1, u_2, u_3, u_4 \in U\},$$

dimana $U = \{(u_1, u_2, u_3, u_4) : 0 \le u_1 \le 1, 0 \le u_2 \le 1, 0 \le u_3 \le 1, 0 \le u_4 \le 1\}$.

Masalah kontrol optimal diselesaikan dengan memenuhi kondisi-kondisi pada Prinsip Minimum Pontryagin. Terlebih dahulu didefinisikan fungsi Hamilton sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
H = mL + nB + w{u_1}^2 + x{u_2}^2 + y{u_3}^2 + z{u_4}^2 \\
&+ \lambda_S\big(b_1 + \gamma_2 L + \gamma_3 B + \eta R - \mu S - \gamma_1 S \\
&- (1 - u_1)\big(\beta_1 LS + \beta_2 BS + \theta S\big) + u_2 L + \xi u_3 B + u_4 R\big) \\
&+ \lambda_L\big(b_2 + (1 - u_1)\big(\beta_1 LS + \beta_2 BS + \theta S\big) - \gamma_1 L - \gamma_2 L - \mu L - \alpha L \\
&- u_2 L + (1 - \xi) u_3 B\big) + \lambda_B\big(b_3 + \alpha L - \mu B - \gamma_1 B - \gamma_3 B - u_3 B\big) \\
&+ \lambda_R\big(b_4 + \gamma_1 S + \gamma_1 L + \gamma_1 B - \eta R - \mu R - u_4 R\big)
\end{aligned}
$$

dimana $\lambda_S \equiv \lambda_S(t), \lambda_L \equiv \lambda_L(t), \lambda_B \equiv \lambda_B(t)$ dan $\lambda_R \equiv \lambda_R(t)$ adalah variabel *costate*.

Menurut Prinsip Minimum Pontryagin, fungsi Hamilton mencapai solusi optimal jika memenuhi kondisi-kondisi berikut.

1. Kondisi Stasioner

a. $\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 \Leftrightarrow 2wu_1 + \lambda_S(\beta_1 LS + \beta_2 BS + \theta S) - \lambda_L(\beta_1 LS + \beta_2 BS + \theta S) = 0$

$$\Leftrightarrow \tilde{u}_1 = \frac{(\lambda_L - \lambda_S)(\beta_1 LS + \beta_2 BS + \theta S)}{2w}$$

Karena didefinisikan $0 \leq u_1 \leq 1$, solusi $\bar{u}_1$ adalah

$$\bar{u}_1 = \begin{cases} 0, & \tilde{u}_1 \leq 0 \\ \tilde{u}_1, & 0 \leq \tilde{u}_1 \leq 1 \\ 1, & \tilde{u}_1 \geq 1, \end{cases}$$

sehingga kontrol optimal $\bar{u}_1$ dapat dinyatakan sebagai

$$\bar{u}_1 = \min\left\{\max\left(0, \frac{(\lambda_L - \lambda_S)(\beta_1 LS + \beta_2 BS + \theta S)}{2w}\right), 1\right\}.$$

b. $\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 \Leftrightarrow 2xu_2 + \lambda_S L - \lambda_L L = 0$

$$\Leftrightarrow \tilde{u}_2 = \frac{(\lambda_L - \lambda_S)L}{2x}$$

Karena didefinisikan $0 \leq u_2 \leq 1$, solusi $\bar{u}_2$ adalah

$$\bar{u}_2 = \begin{cases} 0, & \tilde{u}_2 \leq 0 \\ \tilde{u}_2, & 0 \leq \tilde{u}_2 \leq 1 \\ 1, & \tilde{u}_2 \geq 1, \end{cases}$$

sehingga kontrol optimal $\bar{u}_2$ dapat dinyatakan sebagai

$$\bar{u}_2 = \min\left\{\max\left(0, \frac{(\lambda_L - \lambda_S)L}{2x}\right), 1\right\}.$$

c. $\frac{\partial H}{\partial u_3} = 0 \Leftrightarrow 2yu_3 + \lambda_S \xi B + \lambda_L(1-\xi)B - \lambda_B B = 0$

$$\Leftrightarrow \tilde{u}_3 = \frac{\lambda_B B - \lambda_L(1-\xi)B - \lambda_S \xi B}{2y}$$

Karena didefinisikan $0 \leq u_3 \leq 1$, solusi $\bar{u}_3$ adalah

$$\bar{u}_3 = \begin{cases} 0, & \tilde{u}_3 \leq 0 \\ \tilde{u}_3, & 0 \leq \tilde{u}_3 \leq 1 \\ 1, & \tilde{u}_3 \geq 1, \end{cases}$$

sehingga kontrol optimal $\bar{u}_3$ dapat dinyatakan sebagai

$$\bar{u}_3 = \min\left\{\max\left(0, \frac{\lambda_B B - \lambda_L(1-\xi)B - \lambda_S \xi B}{2y}\right), 1\right\}.$$

d. $\frac{\partial H}{\partial u_4} = 0 \Leftrightarrow 2zu_4 + \lambda_S R - \lambda_R R = 0$

$$\Leftrightarrow \tilde{u}_4 = \frac{(\lambda_R - \lambda_S)R}{2z}$$

Karena didefinisikan $0 \leq u_4 \leq 1$, solusi $\bar{u}_4$ adalah

$$\bar{u}_4 = \begin{cases} 0, & \tilde{u}_4 \leq 0 \\ \tilde{u}_4, & 0 \leq \tilde{u}_4 \leq 1 \\ 1, & \tilde{u}_4 \geq 1, \end{cases}$$

sehingga kontrol optimal $\bar{u}_4$ dapat dinyatakan sebagai

$$\bar{u}_4 = \min\left\{\max\left(0, \frac{(\lambda_R - \lambda_S)R}{2z}\right), 1\right\}.$$

2. Persamaan *state*

$$\frac{dH}{d\lambda_S} = \frac{dS}{dt} = b_1 + \gamma_2 L + \gamma_3 B + \eta R - \mu S - \gamma_1 S - (1-u_1)\big(\beta_1 LS + \beta_2 BS + \theta S\big)$$
$$+ u_2 L + \xi u_3 B + u_4 R$$

$$\frac{dH}{d\lambda_L} = \frac{dL}{dt} = b_2 + (1-u_1)\big(\beta_1 LS + \beta_2 BS + \theta S\big) - \gamma_1 L - \gamma_2 L - \mu L - \alpha L - u_2 L$$
$$+ (1-\xi)u_3 B$$

$$\frac{dH}{d\lambda_B} = \frac{dB}{dt} = b_3 + \alpha L - \mu B - \gamma_1 B - \gamma_3 B - u_3 B$$

$$\frac{dH}{d\lambda_R} = \frac{dR}{dt} = b_4 + \gamma_1 S + \gamma_1 L + \gamma_1 B - \eta R - \mu R - u_4 R$$

dengan kondisi awal $S(0) = S_0, L(0) = L_0, B(0) = B_0$ dan $R(0) = R_0$.

3. Persamaan *costate*

$\frac{d\lambda_S}{dt} = -\frac{dH}{dS} = -\Big(\big(-\mu - \gamma_1 - (1-u_1)(\beta_1 L + \beta_2 B + \theta)\big)\lambda_S + \big((1 - u_1)(\beta_1 L + \beta_2 B + \theta)\big)\lambda_L + \gamma_1 \lambda_R\Big)$

$\frac{d\lambda_L}{dt} = -\frac{dH}{dL} = -(c + (\gamma_2 - \beta_1 S + u_1\beta_1 S + u_2)\lambda_S + (\beta_1 S - u_1\beta_1 S - \gamma_1 - \gamma_2 - \mu - \alpha - u_2)\lambda_L + \alpha\lambda_B + \gamma_1\lambda_R)$

$\frac{d\lambda_B}{dt} = -\frac{dH}{dB} = -(d + (\gamma_3 - \beta_2 S + u_1\beta_2 S + \xi u_3)\lambda_S + (\beta_2 S - u_1\beta_2 S + u_3 - \xi u_3)\lambda_L + (-\mu - \gamma_1 - \gamma_3 - u_3)\lambda_B + \gamma_1\lambda_R)$

$\frac{d\lambda_R}{dt} = -\frac{dH}{dR} = -\big((\eta + u_4)\lambda_S + (-\eta - \mu - u_4)\lambda_R\big)$

dengan kondisi transversal $\lambda_S(T) = \lambda_L(T) = \lambda_B(T) = \lambda_R(T) = 0.$

Sistem optimal diperoleh dengan memasukkan kontrol optimal $\bar{\mathbf{u}}$ ke sistem persamaan state dan costate sehingga diperoleh sistem yang optimal sebagai berikut:

$$\frac{dS^*}{dt} = f_1\left(S^*, L^*, B^*, R^*, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_{3,}\bar{u}_4\right)$$
$$\frac{dL^*}{dt} = f_2\left(S^*, L^*, B^*, R^*, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_{3,}\bar{u}_4\right)$$
$$\frac{dB^*}{dt} = f_3\left(S^*, L^*, B^*, R^*, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_{3,}\bar{u}_4\right)$$
$$\frac{dR^*}{dt} = f_3\left(S^*, L^*, B^*, R^*, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_{3,}\bar{u}_4\right)$$

$$\frac{d\lambda_S{}^*}{dt} = -\Big(\big(-\mu - \gamma_1 - (1-\bar{u}_1)(\beta_1 L^* + \beta_2 B^* + \theta)\big)\lambda_S{}^* + \big((1-\bar{u}_1)(\beta_1 L^* + \beta_2 B^* + \theta)\big)\lambda_L{}^* + \gamma_1\lambda_R{}^*\Big)$$

$$\frac{d\lambda_L{}^*}{dt} = -(c + (\gamma_2 - \beta_1 S^* + \bar{u}_1\beta_1 S^* + \bar{u}_2)\lambda_S{}^* + (\beta_1 S^* - \bar{u}_1\beta_1 S^* - \gamma_1 - \gamma_2 - \mu - \alpha - \bar{u}_2)\lambda_L{}^* + \alpha\lambda_B{}^* + \gamma_1\lambda_R{}^*)$$

$$\frac{d\lambda_B{}^*}{dt} = -(d + (\gamma_3 - \beta_2 S^* + \bar{u}_1\beta_2 S^* + \xi\bar{u}_3)\lambda_S{}^* + (\beta_2 S^* - \bar{u}_1\beta_2 S^* + \bar{u}_3 - \xi\bar{u}_3)\lambda_L{}^* + (-\mu - \gamma_1 - \gamma_3 - \bar{u}_3)\lambda_B{}^* + \gamma_1\lambda_R{}^*)$$

$$\frac{d\lambda_R{}^*}{dt} = -\left((\eta + \bar{u}_4)\lambda_S{}^* + (-\eta - \mu - \bar{u}_4)\lambda_R{}^*\right)$$

dengan kondisi batas $S(0) = S_0, L(0) = L_0, B(0) = B_0$ dan $R(0) = R_0$, dan $\lambda_S(T) = \lambda_L(T) = \lambda_B(T) = \lambda_R(T) = 0$.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh teorema berikut.

Teorema 1. Diberikan kontrol optimal $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$, dan solusi *state* optimal S^*, L^*, B^*dan R^* yang meminimumkan fungsi objektif $J(u_1, u_2, u_3, u_4)$ sehingga terdapat variabel *costate* $\lambda_S, \lambda_L, \lambda_B$ dan λ_R yang memenuhi

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_S}{dt} = -\Big(&\big(-\mu - \gamma_1 - (1 - u_1)(\beta_1 L + \beta_2 B + \theta)\big)\lambda_S \\ &+ \big((1 - u_1)(\beta_1 L + \beta_2 B + \theta)\big)\lambda_L + \gamma_1 \lambda_R\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_L}{dt} = -(&m + (\gamma_2 - \beta_1 S + u_1\beta_1 S + u_2)\lambda_S \\ &+ (\beta_1 S - u_1\beta_1 S - \gamma_1 - \gamma_2 - \mu - \alpha - u_2)\lambda_L + \alpha\lambda_B + \gamma_1\lambda_R)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_B}{dt} = -(&n + (\gamma_3 - \beta_2 S + u_1\beta_2 S + \xi u_3)\lambda_S + (\beta_2 S - u_1\beta_2 S + u_3 - \xi u_3)\lambda_L \\ &+ (-\mu - \gamma_1 - \gamma_3 - u_3)\lambda_B + \gamma_1\lambda_R)\end{aligned}$$

$$\frac{d\lambda_R}{dt} = -\left((\eta + u_4)\lambda_S + (-\eta - \mu - u_4)\lambda_R\right)$$

dengan kondisi transversal $\lambda_S(T) = \lambda_L(T) = \lambda_B(T) = \lambda_R(T) = 0$, dan kontrol optimal $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$, dan $\bar{u}_4$ memenuhi kodisi optimal,

$$\bar{u}_1 = \min\left\{\max\left(0, \frac{(\lambda_L - \lambda_S)(\beta_1 LS - \beta_2 BS + \theta S)}{2w}\right), 1\right\}$$

$$\bar{u}_2 = \min\left\{\max\left(0, \frac{(\lambda_L - \lambda_S)L}{2x}\right), 1\right\}$$

$$\bar{u}_3 = \min\left\{\max\left(0, \frac{\lambda_B B - \lambda_L(1 - \xi)B - \lambda_S \xi B}{2y}\right), 1\right\}$$

$$\bar{u}_4 = \min\left\{\max\left(0, \frac{(\lambda_R - \lambda_S)R}{2z}\right), 1\right\}.$$

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin pada model penyebaran virus komputer dengan pengaruh komputer eksternal yang terinfeksi dan *removable storage media* dengan kontrol, dibentuk fungsi Hamilton yang memenuhi kondisi optimal sehingga diperoleh kontrol optimal $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}$ dan $\overline{u_4}$.

Untuk penelitian selanjutnya, dapat dilakukan simulasi secara numerik dengan menggunakan metode Sweep Maju-Mundur yang dikombinasikan dengan metode Runge-Kutta orde 4.

DAFTAR PUSTAKA

Achadiyah, A. L., *Analisis Kestabilan Model Virus Komputer dengan Infeksi Tunda dan Pemulihan Tunda*, Skripsi, IPB, 2015.

Chen, L., Hattaf, K., dan Sun, J., *Optimal Control of a Delayed SLBS Computer Virus Model*, Physica A, **427** (2015), 244-250.

Darajat, P. P., Suryanto, A., dan Widodo, A., *Optimal Control On The Spread of SLBS Computer Virus Model*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, **107**(3) (2016), 749-758.

Gopal, M., *Modern Control System Theory*. Mohinder Singh Sejwal for Wiley Eastern Limited. 1985.

Yang, M., Zhang, Z., Li, Q., dan Zhang G., *An SLBRS Model with Vertical Transmission of Computer Virus over the Internet*, Yang, X., Mishra, B.K., dan Liu, Y., Discrete Dynamics in Nature and Society (An International Multidiciplinary Research and Review Journal), Hindawi Publishing Corporation, Egypt , 2012, 84-100.

Yang, X., Liu, B., dan Gan, C., *Global Stability of an Epidemic Model of Computer Virus*, Ding, H., Lizama, C., N'Guerekata, G.M., dan Cuevas, C., Abstract and Applied Analysis (Asymptotic Behavior of Nonlinear Evolution Equations), Hindawi Publishing Corporation, Egypt, 2014, 24-28.

Zhang, X., *Modeling the Spread of Computer Viruses under the Effects of Infected External Computers and Removable Storage Media*, International Journal of Security and its Applications, **10**(3) (2016), 419-428.